140:systèmes linéaires, systèmes échelonnés; Exemples, résolutions, applications

Pierre Lissy

April 26, 2010

1 Considérations théoriques

1.1 Définitions

Définition 1. *Système linéiare: équation en x de la forme $Ax = b$. Le rang de A noté r est appelé rang du système, A est la matrice associée au système linéaire, et x est une solution; Le système estdit compatible ssi il admet au moins une solution.*

Proposition 1. *Si le système est compatible alors l'ensemble des solutions est un espace affine de direction de noyau de A le système est compatible ssi $b \in Im(A)$.*

1.2 Matrices de transvection, dilatation

Définition 2. *Matrices élémentaires :*

Matrices de dilatation: $D_i(\lambda)$ matrice diagonale avec que des 1 sauf

Matrices de transvection : $T_{ij}(\lambda) = Id+$ un λ en position ij.

matrices de permutations : associée à une permutation, ou plus simple à une transposition (de toute façon toute permutatio nest produit de transpositions...)

Théorème 1. *les matrices de dilatation et de transvections engendrent $GL_n(k)$ dans le cas d'un corps.*

1.3 Résolution théorique de systèmes de Cramer

Théorème 2. *Le système $Ax = b$ avec A inversible se résoud de manière formelle sous la forme $x_i = det(A_1, \dots a_{i-1}, b, \dots)$.*

Remarque 1. *Evidemment numériquement il est hors de question de se servir de ses formules telles quelles qui ont un coût assez prohibitif: il faut calculer des déterminants ce qui se fait en $n!!$.*

1.4 Résolution théorique de systèmes rectangulaires

Lemme 1. *Le rang d'une matrice carré ou non est le plus grand entier r tel que l'on peut trouver un mineur de taille r non nul.*

Théorème 3. *On considère maintenant un système $Ax = b$ avec A pas forcément carré. Il existe un déterminant carré non nul extrait de A de taille $r = rg(A)$, appelé déterminant principal (il est en général pas unique). Quitte à échanger les inconnues et à échanger les lignes on peut supposer que le mineur diagonal de taille r est non nul. La matrice extraite est noté C On appelle déterminan caracteristique (ou bordant) un déterminant de la forme $\begin{pmatrix} C & b_i \\ a_{kj} & b_k \end{pmatrix}$ avec $k \geqslant r$. Le système est compatible ssi tous les bordants sont nuls. L'espace vectoriel des solutions est alors de dimension $n - r$.*

1.5 Résolution de systèmes circulants

Théorème 4 (Déterminant circulant). *On définit la matrice circulante C associée à un polynôme P. Alors $det(C) = \prod_k P(w^k)$ où w est la racine n-ième élémentaire. Notamment si les coefficients sont entier alors $det(C) \equiv c_1 + \ldots + c_n[n]$.*

Application 1. *On remarque qu'on a pour le passage des coefficients aux valeurs propres une formule de type TFD. Ainsi, par transformée de Fourier inverse on peut calculer les coefficients à partir des valeurs propres. Ainsi, le calcul des solutions d'un système circulant est très rapide: $Cx = b$ équivaut à un produit de convolution discrèt $c*x = b$ où c est la première ligne de C, à partir de là par la formule de trivialisation du produit de convolution on a $F_n(c*x) = F_n(c)F_n(x) = F_n(b)$ et donc $x = F_n^{-1}(F_n(b)/F_n(c))$ et à l'aide d'un algorithme de transformée de Fourier rapide on fait cela en $O(nlog(n))$ (bien meilleur que du Gauss par exemple qu ids le cas général le fait en $O(n^3)$)*

2 Méthodes directes pour la résolution de systèmes linéaires

$Ax = b$ avec A rectangulaire.

2.1 Intêret des systèmes échelonnés

Définition 3. *un système échelonné est une équation de la forme $Ax = b$ avec A une matrice échelonnée suivant les lignes: le nombre de zeros au début de chaque ligne croit strictement.*

Proposition 2. *un système échelonné qui est supposé compatible se résoud en un petit nombre d'opérations (de l'ordre de nm). On va donc chercher dans la résolution des systèmes linéaires à celles de systèmes échelonnés.*

2.2 Pivot de Gauss

Théorème 5. *Méthode du pivot de Gauss. On sait de manière effective transformer à l'aide d'opérations élémentaires une matrice rectangualaire A en une matrice échelonnée suivant les lignes. Décrivons l'algorithme. On donne d'abord une étape élémentaire qui consiste à transformer A non nulle en une matrice avec la premiere colonne qui est avec que des zeros sauf en haut.*

1. *On fait en sorte que le coefficient $a_1 1$ soit on nul quitte à multiplier par une matrice de permutation*
2. *On pose $g_{i1} = a_{i1}/a_{11}$ et on retranche à la première colonne ce qu'il faut pour obtenir des zeros grâce à une transvection*

Ensuite, on réapplique cette étape à la sous-matrice $A_{ij}, i \geqslant 2, j \geqslant 2$. Soit elle est nulle et l'algorithme s'arrête. Soit elle est non nulle et on lui applique ce qui précède $E'A' = L'$. Dans ce cas on modifie la grande matrice A en ajoutant un 1.
Ainsi de manière effective on a avec des matrices de permutation, une matrice de dilatation et des matrices de transvections dont le produit est noté E transformé A en $L = EA$

Application 2. *Résolution des systèmes linéaires dans le cas d'un corps: on considère l'équation $Ax = b$. On transforme A en une matrice echelonnée $LAx = Ex = Lb = b'$, E étant échelonnée. Maintenant, de deux choses l'une.*

Soit les conditions de compatibilités ne sont pas vérifiées et pas de solutions

Soit les conditions de compatibilité (ie les $n - r$ coef de b' sont nuls) sont vérifiées. On conclut facilement dans ce cas en voyant qu'en fait les r premières inconnues (où r est le rang de A et donc celui de E, que l'on devine maintenant facilement en utilisant la caractérisation par les mineurs) font office d'inconnues principales: on paramétrise en les dernières inconnues et on se ramène à un système carré: on réécrit $EX = b'$ sous la forme $E'x' = b''$ où x' n'est plus que de taille r, et ou on a ramené tous les termes en plus dans le terme à droite. On a alors toutes solutions en résolvant ce système. le coup de l'algorithme est $O(n^3)$.

2.3 Factorisation LU

Si l'on prend plein de b différents, on calcule plein de fois des matrices, e qui est algorithmiquement stupide. On utilise donc la décomposition LU.

Théorème 6. *Il existe une matrice de permutation A et une matrice L échelonnée par les colonnes, U échelonnées par les lignes telles que $PA = LU$. p peut être choisie égale à l'identité ssi les mineurs principaux sont tous non nuls.*

2.4 Cholevski

Théorème 7. *Toute matrice définie positive peut se décomposer sous la forme $A = L^tL$ avec L triangulaire inférieure. De plus, on sait calculer de manière explicite les coefficients de L par récurrence : $l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}l_{kj})/(l_{kk})$, et $l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum l_{kj}^2}$.*

3 Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires carrés

Ax=b, avec A inversible.

3.1 Consistance, convergence

Définition 4. *Une méthode d'approximation du système précédent est une suite x_k telle que l'on espère qu'elle approche une solution du pb précédent en un certain sens. Elle est dite convergente ssi x_k converge vers $A^{-1}b$. Elle est consistante ssi quand la limite existe, elle vaut ce qu'il faut.*

Théorème 8. *Une méthode de la forme $x_{k+1} = Bx_k + c$ est consistante ssi $c = (I - B)A^{-1}b$ et $I - B$ inversible.*

Théorème 9. *Une méthode consistante de la forme précédente est convergente ssi B^k tend vers 0, ce qui équivaut à dire que le rayon spectral de B est inférieur strictement à 1.*

3.2 Méthode du gradient

Définition 5. *Relation de la forme $x_{k+1} = x_k - \theta(Ax_k - b)$. Schéma convergent ssi $\rho(I - \theta A) < 1$.*

Proposition 3. *Si A est symétrique définie positive, alors il existe un θ pour laquelle la méthode converge. Le θ qui assure une convergence optimale est $2/(\lambda^+ + \lambda^-)$ (notations évidentes).*

Proposition 4. *On considère une matrice telle que $(Ax, x) \geqslant \alpha||x||^2$. Alors la méthode converge pour tout $0 < \theta < 2\alpha/||A||^2$.*

Proposition 5. *Dans le cas où A est symétrique définie positive, on peut se ramener au problème d'optimisation suivant: la solution minimise la fonctionelle $(Ax, x) - 2(b, x)$.*

3.3 Méthodes de décomposition

Définition 6. *On décompose A sous la forme $M - N$ et on écrit la méthode sous la forme $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$. Elle est convergente ssi $\rho(Mn^{-1}) < 1$.*

Théorème 10. *On considère une matrice A hermitienne inversible, et une décomposition telle que $M^* + N$ soit déf pos. Alors le schéma est convergent ssi A déf positive.*

On considère maitnenant la décomposition suivante de $A = D - E - F$, où D est la partie diagonale, $-E$ la partie triang inf et $-F$ celle triang sup.

Définition 7. *Jacobi ponctuelle: $M = D$ et $N = E + F$, avec D inversible.*

Théorème 11. *Si la matrice est à diagonale dominante, alors la méthode est convergente.*

Exemple 1. *Matrice de diagonalisation du Laplacien en dimension 1: on obtient une matrice tridiagonale, à diagonale dominante. CEtte méthode est donc adaptée.*

Définition 8. *Gauss-Siedel ponctuelle:* $M = D - E$ *et* $N = F$.

Théorème 12. *Si la matrice est a diagonale dominante, alors méthode convergente.*

Définition 9. *Méthode de relaxation:* $M = 1/w * (D - wE)$ *et* $N = (1 - w)/wD + F$. $w < 1$*: sous-relaxation,* $w > 1$ *sur-relaxation.*

Proposition 6. *Une condition nécessaire de convergence est* $0 < w < 2$*. Elle est suffisante si la matrice est hermitienne déf positive.*

Proposition 7. *Si la méthode de Jacobi est convergente, c'est aussi le cas de la méthode de Gauss-Siedel et la vitesse de convergence est la même.*

4 Applications

4.1 Calcul du déterminant et de l'inverse, du rang

Application 3. *La métthode du pivot de Gauss fournit immédiatement le déterminant d'une matrice carré (c'est celui de la matrice obtenue multiplié par plus ou moins 1, ceci dépendant du nombre de permutations qu'on a effectué.), ainsi que son rang, ceci demanière effective.*

Application 4. *On calcule facaliment maintenant l'inverse d'une amtrice inversible: on dilate les coefficients diagonaux pour obtenir que des 1 sur la diagonale, puis on effectue l'algorithme de Gauss mais ce coup-ci sur al partie supérieure (autrement dit on applique l'algorithme de Gauss à la transposée). On obtient l'identité et donc la matrice inverse en appliquant la même suite d'opérations en partant de* Id.

4.2 Méthode d'Euler implicite pour les EDO

Définition 10. *On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire* $y' = A(t)y$ *avec* A *une matrice. On veut calculer de manière approchée une solution. On le fait par la méthode d'Euler implicite:* $y_{n+1} = y_n + hA(t_n)y_{n+1}$. *Ceci revient à* $(I - A)y^{n+1} = y_n$.

On peut alors résoudre ce système par exemple par une méthode de factorisation LU (car on change ici à chaque fois de second membre!).

Remarque 2. *Interêt par rapport à la méthode explicite? stabilité renforcée. En effet en dimension 1 par exemple pour l'équation* $y' = y$*, le schéma explicite aboutit à l'approximation* $(1 + ah)^n$*, et on voit que l'on a donc grosse erreur commise, alors que le schéma implicite aboutit à* $(1 - ah)^{-n}$*, donc l'erreur commise est plus petite.*

Corollaire 1. *Schéma d'Euler implicite pour les EDO non linéaires:* $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}$. *Pour le résoudre, on utilise une méthode de quasi-Newton, où on est amené à inverser un système linéaire encore une fois, et on le fait pas la méthode* LU.

4.3 Problème de Dirichlet

cf di menza à faire

References

[1]