

148: formes quadratiques réelles. Exemples et applications

Pierre Lissy

March 2, 2010

Dans toute la suite, E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, éventuellement de dimension infinie, et Q est une forme quadratique sur E de forme polaire φ . On suppose connues les notions habituelles sur les formes quadratiques pour se concentrer sur les spécificités du cas réel.

1 Généralités

1.1 Théorème d'inertie de Sylvester

[1]

Théorème 1. *On suppose E de dimension finie n . On peut décomposer Q sous la forme suivante: $Q(x) = f_1(x) + \dots + f_p(x) - f_{p+1}(x) - \dots - f_{p+q}(x)$, où les f sont des formes linéaires indépendantes. Toute autre décomposition de Q sous la forme $Q(x) = f'_1(x) + \dots + f'_{p'}(x) - f'_{p'+1}(x) - \dots - f'_{p'+q'}(x)$ où les formes linéaires sont aussi indépendantes est tel que $p = p'$ et $q = q'$.*

Définition 1. *Signature de Q = couple (p, q) .*

Remarque 1. 1. $p + q = \text{rg} Q$

2. Si l'on trouve 3 sev de E notés F^+, F^- et F^0 qui sont en somme directe Q -orthogonale de somme E , avec Q déf pos sur F^+ , déf neg sur F^- et nulle sur le dernier, Alors la signature est $(\dim F^+, \dim F^-)$. Inversément la démo du théorème précédent montre qu'on peut trouver de tels sev

Proposition 1 (Gauss). *On pose $Q(x) = \sum_i a_{ii}x_i^2 + \sum_{i < j} a_{ij}x_i x_j$.*

1. Si un des a_{ii} est non nul, par exemple a_{11} . $Q(x) = a_{11}x_1^2 + x_1B + C$, B linéaire en $(x_2, \dots, x_n)$, C quadratique en $(x_2, \dots, x_n)$. $Q(x) = a_{11}1(x_1 + B/2a_{11})^2 + [C - B^2/4a_{11}]$. On réapplique l'algorithme à la partie entre crochets.
2. Si tous les a_{ii} sont nuls. Soit tous les a_{ij} sont nuls et l'algorithme s'arrête, soit un est non nul, par exemple a_{12} . $Q(x) = a_{12}x_1x_2 + x_1B + x_2C + D$ B, C linéaire, D quadratique en $(x_3, \dots, x_n)$. $Q(x) = a_{12}/4 * [(x_1 + x_2 + (B + C)/a_{12})^2 - (x_1 - x_2 + (C - B)/a_{12})^2 + [D - (B + C)/a_{12}]]$ et on réapplique l'algorithme à la partie entre crochets. On obtient $Q = \lambda_1 L_1^2 + \dots + \lambda_p L_p^2 - \lambda_{p+1} L_{p+1}^2 - \dots - \lambda_q L_{p+q}^2$ avec les formes linéaires indépendantes et la signature est (p, q) .

Exemple 1. 1. $Q(x, y, z, t) = xy + yz + xz + yz = 1/4 * ((x + y + z + t)^2 + (x + z - y - t)^2)$ de signature $(1, 1)$ et de rang 2.

2. $Q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz = (x + z/2)^2 - 2(y - z/4)^2 - z^2/8$ de signature $(1, 2)$ de rang 3.

Théorème 2. *Deux formes quadratiques réelles sur un ev de dim finie sont équivalentes ssi elles ont même signature. Deux matrices sont dans la même classe de congruence ssi les formes quadratiques associées ont même signature.*

Application 1. [4] Application du théorème d'inv locale: les classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sont ouvertes. Les classes de congruence de matrices inversibles sont ouvertes.

En fait, on peut faire bien mieux: le théorème de Morse.

Théorème 3 (Morse). [3][4] Application de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. on suppose $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ non dégénérée de signature $(p, n - p)$. Alors il existe un difféo locale valant 0 en 0 tel que $f(x) = f(0) + \varphi_1^2(x) + \dots + \varphi_p^2(x) - \dots$

Application 2. $D^2f(0,0)$ de signature $(+,-)$. La courbe $f(x,y) = f(0,0)$ admet un point double à l'origine et le couple des tangentes est d'équation .

1.2 Formes quadratiques positives

Définition 2. Q positive ssi $Q(x) \geq 0$.

Remarque 2. Déf positive ssi $Q(x) > 0$ si x non nul.

On rappelle l'identification entre les formes quadratiques réelles et les éléments de $\mathcal{L}(E, E^*)$.

Définition 3. E espace de Banach. Q non dégénérée ssi sa forme polaire φ est un élément de $\mathcal{L}_c(E, E')$ est un isomorphisme (morphisme bijectif bicontinu)

Remarque 3. Q positive non dégénérée implique Q définie positive. En fait on a un résultat plus fort cf [2]: Q pos non dég $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0, q(x) \geq \alpha \|x\|^2$.

Proposition 2. Q positive ssi de signature $(p, 0)$. Q déf pos ssi de signature $(n, 0)$. En dim finie non dég est équivalent à φ définie pour les Q positives.

Remarque 4. On définit de même les formes négatives et on retrouve les propriétés en remarquant : Q négative ssi $-Q$ positive

Théorème 4 (C-S). Si Q est positive, $\varphi(x, y)^2 \leq Q(x)Q(y)$. Si Q est en plus définie, égalité ssi (x, y) liée.

Théorème 5 (Minkovski). Si Q est positive, $Q(x, y)^{1/2} \leq (Q(x)^{1/2}Q(y)^{1/2})$. Donc $\sqrt{\cdot}(Q)$ est une semi-norme. Si De plus Q est définie, $\sqrt{\cdot}(Q)$ est une norme et on a égalité ssi x et y positivement colinéaires.

Remarque 5. [1] En dimension finie, une forme définie est soit positive soit négative.

1.3 Réduction des formes quadratiques réelles en dimension finie

Théorème 6. Soit B une base de E . Soit $A = M_B(Q)$. Alors A est orthogonalement semblable à une amtrice diag $\text{diag}(\lambda_i)$.

Corollaire 1. La signature est $(\text{Card}\{\lambda_i > 0\}, \text{Card}\{\lambda_i < 0\})$

Théorème 7. Si Q est définie positive, et si Q' est une autre forme quadratique, alors il existe une base B qui est Q -orthonormée et telle que $M_B(Q')$ diagonale.

1.4 Cône isotrope

Proposition 3. Supposons E de dimension finie. Si Q est non dégénérée et non définie, il existe une base de vecteurs isotropes. Si B est une et $\text{Tr}(M_B(\varphi)) = 0$ alors le cône isotrope contient une BON de vecteurs.

Remarque 6. En dimension 2, seulement deux droites dans le cône isotrope.

Remarque 7. Si Q est positive, $C(Q) = \text{Ker}(Q)$ et le cône isotrope est un ev. D'habitude on a juste $\text{Ker}(Q) \subset C(Q)$.

2 Applications à la recherche d'extremum

Rappel: Soit E un espace de Banach et f une application deux fois différentiable d'un ouvert U de E à valeurs réelles. Alors $df(x)$ est une forme bilinéaire symétrique et son carré est une forme quadratique. Rappelons l'isométrie $\mathcal{L}_c(E, E') \simeq (E \times E, \mathbb{R})$. Enfin, rappel sur la Hessienne: matrice symétrique telle que $d^2 f(h, k) = \langle H_f(x)h, k \rangle$.

2.1 Conditions d'extrema

On se ramène tjrs à des mins quitte à changer f en $-f$. Rappel: x est un extremum $\Rightarrow df(x) = 0$.

Théorème 8. Si f admet un min local en a , $d^2 f(a)$ est positive. Si $df(a) = 0$ et $d^2 f(a)$ est déf positive on a un minimum strict en a .

Toutes les réciproques sont fausses.

Exemple 2. [4]/[3]

1. $f(x, y) = x^2 - y^3$. 0 est point critique, la hessienne est positive, mais f n'admet pas de min
2. $f(x, y) = x^2 + y^4$. 0 est min strict mais la hessienne est pas déf pos.
3. $f(x, y) = x^2 + y^3$ n'a pas d'extremums sur $\mathbb{R}^2$
4. $f(x, y) = x^2 - y^2 + y^4/4$ deux min locaux et en fait globaux stricts, $(0, \sqrt{2})$ et son opposé.

2.2 Optimisation convexe

Théorème 9. Soit U un ouvert convexe. f est convexe sur U $\Leftrightarrow$ la diff seconde est positive. Si la diff seconde est positive non dégénérée en tout point, f est strictement convexe.

Ceci permet d'affirmer le théorème suivant:

Théorème 10. Si f est de classe C^1 et convexe alors f admet un min en a ssi $df(a) = 0$.

Corollaire 2 (Newton). On considère f de classe C^3 et a un minimum de f . Supposons la Hessienne en tout point déf pos. Dans ce cas le min est unique. De plus, on peut approcher a de manière quadratique localement en posant

1. $x_0 = x$ proche de a
2. $x_n = x_n - H_f(x_n)^{-1} \nabla f(x_n)$

Remarque 8. [3]/[4] En fait, détournement du vrai Newton qui permet de trouver un zéro a d'une fonction (mais ici le 0 de la différentielle est le min recherché):

1. $x_0 = x$ proche de a
2. $x_n = x_n - df(x_n)^{-1}(f(x_n))$

. La encore la convexité permet de passer un stade pour avoir la convergence globale. Prenons f une application de classe C^3 et a un 0 de f . Supposons la Hessienne en tout point déf pos. Alors f admet un unique zéro, de plus on a convergence cette fois-ci globale de la méthode de Newton vers le 0, ce qui est très intéressant en pratique!

Application 3. H un Hilbert, $l \in H'$ et a une forme bilinéaire continue non dégénérée positive. $\exists! u \in H | \forall v, a(u, v) = l(v)$. De plus, u est l'unique minimiseur de la fonctionnelle $J(u) = 1/2 * a(u, u) - l(u)$.

Application 4. [4] Soit $M \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Le minimum de $\|Mx - b\|_2$ est atteint en $x \Leftrightarrow {}^t M M x = {}^t M b$. Notamment si ${}^t M M$ est inversible, x est unique. Ainsi, si l'on se donne des points du plan (λ_i, μ_i) avec les λ_i distinct, il existe un unique couple (a, b) tel que $\sum (a\lambda_i + b - \mu_i)$ soit minimale. La droite $y = ax + b$ est la droite de régression linéaire.

3 Coniques, quadriques

4 Equation réduite d'une conique

Définition 4. Une conique est une courbe donnée par une des équations implicites suivantes:

1. $y^2 = 2px$: parabole de sommet 0, d'axe Ox , de foyer $(0, p/2)$.
2. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, a \leq b$: ellipse de center 0, de demi grand-axe suivant Ox de longueur a , de demi petit-axe de longueur b selon Oy , d'excentricité $e = c/a$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, de paramètre $p = b^2/a$, de foyers $(0, c)$ et $(0, -c)$.
3. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$: hyperbole de centre 0, d'excentricité $e = c/a$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, de paramètre $p = b^2/a$, de foyers $(0, c)$ et $(0, -c)$.

5 Courbes du second degré

Définition 5. Une courbe du second degré est une courbe algébrique définie comme annulant un polynôme de degré 2 à deux variables.

Pour étudier une telle courbe, on isole la partie quadratique Q , que l'on réduit, puis on change de repère pour obtenir quelque chose du type $(x - a)^2 + -(y - b)^2 = c$, et on reconnait soit une conique soit un cas dégénérée (vide, un point, deux droites concourantes...)

Exemple 3. $[6]13x^2 + 64y^2 + 62xy = 1$: ellipse centrée en 0

Exemple 4. $x^2 + y^2 = 0$: un point, $x^2 + y^2 = -1$: vide, $x^2 - y^2 = 0$: deux droites...

6 Equation réduite d'une quadrique

Définition 6. Une quadrique est une surface donnée implicitement par une des neuf équations réduites suivantes:

1. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$: ellipsoïde
2. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$: cône du second degré
3. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$: hyperboloïde à une nappe
4. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$: hyperboloïde à deux nappes
5. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$: cylindre elliptique
6. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$: cylindre hyperbolique
7. $x^2 = 2pz$: cylindre parabolique
8. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z$: paraboloides elliptique
9. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = z$: paraboloides hyperbolique

7 Surfaces du second degré

Définition 7. Surface du second degré = courbe algébrique annulant un polynôme à trois variables de degré 2.

Méthode d'étude identique.

Exemple 5. $[6]4xy - z^2 - 1 = 0$: hyp à deux nappes

Exemple 6. $4xy - z^2 - 1 + 2x - 4y = 0$: hyp à une nappe

8 Applications en géométrie[5]

Dorénavant on se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère ON (O, i, j, k) , et on se donne Σ une nappe simple suffisamment régulière.

8.1 Position d'une nappe par rapport à un plan tangent

On considère une nappe paramétrée par une équation cartésienne du type $z = f(x, y)$. avec f de classe C^2

Théorème 11. *On considère $d^2f(M)(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$.*

1. *Si $rt - s^2 > 0$, M est dit elliptique, Σ ne traverse pas le plan tangent et est au dessus si la forme est déf pos, en dessous si elle est déf neg.*
2. *Si $rt - s^2 < 0$, M est dit hyperbolique, la surface traverse son plan tangent. La forme quadr et non déf non dég. Soit l_1 et l_2 les deux droites du cône isotrope. On pose $S^+ = (x, y) | d^2f(M)(x, y)^2 > 0$ et de même $S^- = (x, y) | d^2f(M)(x, y)^2 < 0$. Si Γ est une courbe tracée sur Σ passant pas M_0 , et si la tangente à Γ en M_0 est telle que sa projection sur xOy est dans S^+ (resp S^-), alors Γ est localement strictement au dessus (resp en dessous) de T^{M_0} , Sauf en M_0 .*
3. *$rt = s^2$: point parabolique, on ne peut rien dire de plus sans hypothèses supplémentaires. Dégénérée et non déf.*

8.2 Première forme quadratique fondamentale

Définition 8. *La restriction au plan tangent de la forme quadratique $v \mapsto ||v||^2$ est appelée première forme quadratique fondamentale, noté Φ^M .*

Théorème 12. *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ et F une paramétrisation admissible de Σ . Si $v \in T_M$ s'écrit $v = \lambda \partial_u M + \mu \partial_v M$. Alors $\Phi_1^M(M)(v) = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2$ avec $E = ||\partial_u M||^2$, $F = \partial_u M \cdot \partial_v M$, $G = ||\partial_v M||^2$. De plus, $H := \sqrt{EG - F^2} = ||\partial_u M \wedge \partial_v M||^2$.*

Application 5. *Si Γ est un arc tracé sur Σ défini par une paramétrisation admissible sur un intervalle, alors sa longueur est $L(\Gamma) = \int_I \sqrt{(\Phi_1^M(u'(t), v'(t)))} dt$.*

8.3 Seconde forme quadratique fondamentale

Définition 9. *Avec les mêmes notations que précédemment, on définit $\Phi_2^M(v) = L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2$ avec $L = 1/H[\partial_u M, \partial_v M, \partial_{u,u} M]$, $M = 1/H[\partial_u M, \partial_v M, \partial_{u,v} M]$, $N = 1/H[\partial_u M, \partial_v M, \partial_{v,v} M]$.*

Application 6. *M elliptique ssi φ_2^M définie, M hyperbolique ssi $\Phi_2^M(v)$ non définie non dégénérée, M parabolique ssi $\Phi_2^M(v)$ non déf dégénérée.*

Application 7. *Soit $\mathcal{D}(s)$ le repère de Darboux, associé à la paramétrisation normale s et au vecteur $\tau := v/(||v||^2)$. La courbure normale $\rho_n(s) = h d\tau/ds$ vaut $\rho_n = \Phi_1/\Phi_2$*

References

- [1] Gourdon
- [2] Cartan Calcul diff
- [3] Beck
- [4] Rouvière
- [5] Lelong-Ferrand Arnaudière
- [6] Dixmier tome 2