

201:espaces de fonctions. Exemples et applications.

Pierre Lissy

May 29, 2010

1 Espaces de fonctions continues, régulières

1.1 Définition

Définition-proposition 1. On considère X et Y deux espaces métriques. On considère l'ensemble des fonctions continues (resp continues bornées, resp continues tendant vers 0 en ∞ si X est un espace topologique dénombrable à l'infini) de X dans Y , noté $C(X, Y)$. Si Y est un espace vectoriel (resp une algèbre), ce sont aussi un ev (resp une algèbre). On considère les fonctions continues bornées $(C_b(X, Y))$. est aussi un espace vectoriel normé, et une algèbre dans le cas où Y en est une. L'ensemble des fonctions continues bornées tendant vers 0 en ∞ est aussi un espace vectoriel, ou une algèbre.

Remarque 1. Si K est un espace compact, les fonctions continues et continues bornées s'identifient.

Définition 1. Topologie de la convergence compacte = convergence uniforme sur une suite exhaustive de compacts.

Proposition 1. On suppose X espace topologique localement compact dénombrable à l'infini. L'ensemble des fonctions continues de X dans Y peut être muni d'une structure d'espace topologique pour la topologie de la convergence compacte. Cette topologie est métrisable mais non normable en général (sauf cas particulier donné après). Par contre pour les fonctions continues bornées on a un espace vectoriel normé, tout comme pour les fonctions tendant vers 0 en ∞ .

1.2 Complétude

Théorème 1. Les espaces mentionnés plus haut sont des espaces métriques complets.

Théorème 2. On suppose que Y est un espace vectoriel normé. Alors $C_b(X, Y)$ et $C^0(X, Y)$ sont des espaces de Banach.

1.3 Parties compactes

Théorème 3 (Ascoli). Soit K un espace métrique compact et Y un espace métrique. Les parties relativement compactes sont exactement les parties équi continues.

Application 1. Applications Ascoli:

1. Théorème qui dit qu'un opérateur est compact ssi
2. Théorème d'Ascoli-Peano pour les EDO
3. Non normabilité d'espace (avec Riesz) cf ZQ
4. Sous-espaces fermés de fonctions de classe C^1 avec Banach-Steinhaus

1.4 Parties denses

Théorème 4. Soit K un espace métrique compact, et A une sous-algèbre de $C^0(K, \mathbb{R})$ qui sépare les points de X et telle que $\forall x$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq 0$. Alors A est dense dans $C^0(K, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme. Ce théorème marche encore dans le cas complexe si on suppose l'algèbre stable par conjugaison.

Application 2. Soit trois points non alignés a_i du plan. On pose f_i la fonction $\|x - a_i\|$. Montrer que toute fonction numérique sur $\mathbb{R}^2$ est limite d'une suite de polynômes sans termes constants de ces fonctions.

Corollaire 1. Les polynômes sur $[a, b]$ sont denses dans les fonctions continues. Les polynômes trigonométriques sont denses pour les fonctions périodiques.

Application 3. [6][5] Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout n , $\int f t^n = 0$. Alors f est nulle. Soit f une fonction continue de $[-a, a]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout n , $\int f t^{2n} = 0$. Alors f est nulle. Soit f une fonction continue de $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout n , $\int f t^{2n} = 0$. Alors $f = 0$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ semi-convergente telle que $I_n := \int f(t) e^{-nt} = 0$ pour tout n . Alors f est nulle.

Application 4. [5] Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que pour tout polynôme u d'intégrale nulle, on a $\int f u = 0$. Alors f est cste. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que pour tout polynôme vérifiant $u(a) = u(b)$, on a $\int f u = 0$. Alors $f = 0$.

1.5 Espaces $C^k(\Omega)$

Définition 2. On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et k un entier. On appellera $C^k(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^k sur Ω .

Proposition 2. C'est en fait une k -algèbre et de plus $\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\beta^\alpha \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g$

1.6 Inclusions entre ces espaces

Le théorème D'Ascoli permet de montrer qu'un certain nombre d'inclusions sont compactes.

Application 5. [4][page 276, 284] Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors l'injection $C^k(K) \subset C^0(K)$ est compacte. Plus généralement si $k + \alpha > k' + \alpha'$ alors l'injection $C^{k', \alpha'}(K) \subset C^{k, \alpha}(K)$ est compacte.

2 Espaces de fonctions holomorphes

2.1 Définition

Définition-proposition 2. L'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω est une algèbre, tout élément qui ne s'annule pas est inversible, et la composée est aussi holomorphe.

Définition-proposition 3. $H(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence uniforme est un espace topologique métrisable (on exhibe facilement une distance qui convient) mais non normable.

2.2 Complétude

Proposition 3. L'ensemble $H(\Omega)$ est un sous-espace fermé de l'ensemble C^Ω muni de la topologie de la convergence compacte. De plus la dérivation est une opération continue pour cette topologie.

Corollaire 2. $H(\Omega)$ est un espace complet.

2.3 Parties compactes

Théorème 5 (Montel). *Toute famille de fonctions holomorphes bornée (au sens de la métrique définissant la topologie de la convergence uniforme sur tout compact) est relativement compacte.*

Application 6 (théorème de Riemann). [3]/[chapitre 14] *Tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ est est bijection holomorphe avec la boule ouverte unité. Donc dans $\mathbb{C}$ tout ouvert simplement connexe est contractile.*

Application 7 (Cartan). [4] *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, et $f \in H(\Omega, \Omega)$, telle que $f(a) = a$. On appelle f_n le n -ième itéré de f . Alors*

1. $|f'(a)| \leq 1$
2. $|f'(a)| = 1 \Rightarrow f \in \text{Aut}(\Omega)$
3. $|f'(a)| < 1 \Rightarrow f_n \text{ CVU vers la fonction constante égale à } a.$

2.4 Partie denses

Théorème 6. [3] *On considère un compact K de $\mathbb{C}$ tel que le complémentaire soit un espace connexe. On considère une fonction continue sur K holomorphe sur l'intérieur de K . Alors f est approchable par des polynômes*

On a un autre théorème tout aussi difficile

Théorème 7. [3] *On considère un compact du plan et un ensemble α_j qui contient un point dans chaque cc de $S^2 \setminus K$. Si Ω est un ouvert contenant K , et que f est une fonction holomorphe sur cet ouvert, on peut approcher uniformément sur K par une fraction rationnelle dont les pôles sont dans les α_j .*

3 Espaces L^p

3.1 Définitions

Définition 3. Soit $p \in [1, \infty)$ et soit $f : x \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On pose $\|f\|_p := (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$. On pose $\mathcal{L}_p(X) := \{f \mid \|f\|_p < \infty\}$.

Définition 4. On pose $\|f\|_\infty = \supess(|f|) = \inf \{C \mid |f(x)| \leq C \text{ pp}\}$. On pose $\mathcal{L}_\infty(X) := \{f \mid \|f\|_\infty < \infty\}$

Proposition 4. Si f est mesurable alors $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p$.

3.2 Structure d'espace vectoriel

Définition 5. Soit $p \in [1, \infty]$. On appelle exposant conjugué de p (noté p' dans toute la suite) le nombre $p' \in [1, \infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 8 (Inégalité de Hölder). Soit f et g deux fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_X fg \leq (\int_X f^p)^{\frac{1}{p}} (\int_X g^{p'})^{\frac{1}{p'}}$$

Corollaire 3. Soit $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$. Alors $fg \in L^r(X)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$

Théorème 9 (Inégalité de Minkovski). Soit f et g deux fonctions mesurables positives. Alors $\|f + g\|^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$.

Corollaire 4. Les espaces $(\mathcal{L}^p(X), \|\cdot\|_p)$ sont des espaces vectoriels semi-normés.

Proposition 5. Soit $f \in \mathcal{L}^p(X)$. Alors $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ pp}$. Soit donc la relation suivante : $fRg \Leftrightarrow \|f - g\|_p = 0 \Leftrightarrow f = g \text{ pp}$. C'est une relation d'équivalence. On pose $L_p(X) = \mathcal{L}_p(X)/R$. On pose $\|Cl(f)\|_p := \|f\|_p$. (qui ne dépend pas du représentant choisi). Alors Les espaces $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ sont des espaces vectoriels normés.

3.3 Complétude des espaces $L^p(X)$

Théorème 10 (Riesz-Fischer). $L^p(X)$ est un espace complet.

3.4 Sous-espace dense de $L^p(X)$

Rappel:

Théorème 11. Toute fonction mesurable positive presque partout est limite croissante de fonctions étagées. Donc l'ensemble des fonction étagées est dense dans l'ensemble des fonctions mesurables.

Théorème 12. Toute fonction de L^p positive presque partout est limite croissante de fonction en escalier (ie étagées nulles sauf sur un ensemble de mesure fini), et donc le sous-espace vectoriel des fonctions en escaliers est dense dans L^p .

Remarque 2. Ce résultat permet de démontrer un grand nombre de propriété au travers de ce qu'on appelle "la machine standard": pour démontrer une propriété P vraie sur une fonction de L^p et "linéaire", on montre d'abord qu'elle est vraie sur les indicatrices, puis sur les combinaisons linéaires positives d'indicatrices, puis sur les fonction L^p positives avec le théorème de convergence monotone puis sur toutes les fonctions L^p en écrivant $f = f^+ - f^-$.

Application 8 (Lemme de Riemann-Lebesgue). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\langle x, \xi \rangle} dx \rightarrow 0$ quand ξ tend vers ∞ .

Application 9. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 |mes(A) < \delta \Rightarrow \int_A f \leq \varepsilon$.

3.5 Relations d'inclusions entre espaces $L^p(X)$

Proposition 6. Si μ est une mesure finie, alors $p \leq q \Rightarrow L^q$ s'injecte continûment dans $L^p(X)$.

Remarque 3. Faux même si μ est une mesure de Radon.

Exemple 1. $f : x \mapsto |x|^s 1_{[-1;1]} \in L^p(\mathbb{R})$ ssi $ps > -1$.
 $f : x \mapsto |x|^s 1_{[1;\infty)} \in L^p(\mathbb{R})$ ssi $ps < -1$.

3.6 Quelques opérateurs entre espaces les espaces L^p et d'autres espaces de fonctions régulières

Proposition 7. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors on définit sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\langle x, \xi \rangle} dx$.

Théorème 13. 1. $\mathcal{F}$ envoie L^1 sur les fonctions continues bornées tendant vers 0 en l'infini, et l'inclusion $L^1 \subset L^\infty$ est continue

2. Après prolongement $\mathcal{F}$ envoie L^2 sur L^2 l'inclusion est continue

3. $\mathcal{F}$ envoie la classe de Schwartz sur la classe de Schwartz et l'inclusion est continue

4.

Définition 6. On définit le produit de convolution de deux fonctions L^1 par la formule: $f * g(x) = \int f(t)g(x-t)dt$.

Théorème 14. 1. $*$ envoie $L^1 \times L^1$ sur L^1 et l'inclusion est continue

2. $*$ envoie $L^1 \times L^2$ sur L^2 et l'inclusion est continue

3. On suppose $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Alors $*$ envoie $L^p \times L^q$ sur L^r et l'inclusion est continue. On a même in résultat plus fort (HLS): $L^p \times L^q$ sur L^∞_Ω et l'inclusion est continue (espace L^p faible)

4. $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

4 Espaces de Sobolev H^s avec s réel positif

4.1 Définitions

Définition-proposition 4. Soit $s \geq 0$. On appelle $H^s(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \int_{\mathbb{R}^n} ((1+x^2)^s) |\mathcal{F}(f)|^2 dx < \infty\}$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} ((1+x^2)^s) |\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)| dx$.

Remarque 4. H^s est aussi la complétion pour la norme $\|\cdot\|_{H^s}$ de C_0^∞ .

Remarque 5. On montre assez facilement que dans le cas où s est entier on a une définition équivalente en imposant que les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre s sont dans L^2 .

Théorème 15. les fonctions C_0^∞ sont denses dans les espaces de Sobolev. La classe de Schwartz est dense dans les espaces de Sobolev.

4.2 Injections de Sobolev

Théorème 16. On a les inclusions suivantes, qui sont de plus continues

1. $s > d/2$: $H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty$
2. $0 \leq s < d/2$: $H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^p$ avec $1/p > 1/2 - s/d$
3. $s > d/2 + k$: $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_{\rightarrow 0}^{(k)}$

En outre si $s > d/2$ $H^s(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre normée complète pour la norme H^s .

4.3 résolution d'une équation de Schrödinger non linéaire

Application 10 (Equation de Schrödinger linéaire et non-linéaire). On s'intéresse à l'EDP suivante (dans $\mathbb{R}^n$ avec $s \geq 0$).

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \in H^s \end{cases} \quad (1)$$

On cherche une solution faible de ce problème, ie on cherche une fonction mesurable u qui vérifie: $\forall \varphi \in S, \forall t \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^n} iu_t - \Delta u \varphi dx = 0$. Ce problème admet une unique solution faible notée $S(t)u_0 := e^{-it\Delta}u_0 := \mathcal{F}(e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}(u_0)(\xi))$. De plus, $S(t)u_0 \in C^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n))$, et l'égalité de Parseval nous donne $\|S(t)u_0\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}$: le propagateur $S(t)$ conserve l'énergie du système. Soit maintenant le système (avec ici $s > \frac{n}{2}$)

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = P(u, \bar{u}) \in L^2 \\ u(0, \cdot) = u_0 \in H^s \end{cases} \quad (2)$$

où P est un polynôme valant 0 en 0. On montre que u est une solution faible sur le temps $[-T, T]$ si et seulement si $u \in C^0([-T, T], H^s)$ et u vérifie l'égalité de Duhamel $A(u) := S(t)u_0 - i \int_0^t S(t-\sigma)P(u)(\sigma) d\sigma = u$. On montre l'existence d'une solution locale en appliquant un théorème de point fixe de Picard sur l'opérateur A (qui est bien un opérateur sur un espace complet $C^0([-T, T], H^s)$), contractant pour un temps T assez petit.

Peut-être penser à introduire:

1. Espace de Schwartz
2. Algèbre de Wiener
3. Dualité des espaces L^p et applications aux problèmes de continuité d'une fonction (argument TT^* en analyse fonctionnelle, notamment Strichartz)

References

- [1] Zuily-Queffelec
- [2] Rudin
- [3] Rudin
- [4] idem
- [5] un des fgn d'analyse
- [6] Gourdon alanyse