

202: exemples de parties denses et applications

Pierre Lissy

June 5, 2010

1 Généralités, premiers exemples simples

1.1 Définitions

Définition 1. Soit X un espace topologique. Un sous ensemble est dit dense ssi $\bar{Y} = X$. Il est dit séquentiellement dense ssi pour tout x dans X il existe une suite d'éléments de Y tendant vers x .

Remarque 1. Un ensemble séquentiellement dense est dense. Attention en général dans un espace topologique la densité n'implique pas la densité séquentielle: il suffit de regarder les fonctions simples (ie nulles sauf en un nombre fini de points) pour la topologie de la convergence simple sur $F([0, 1], \mathbb{R})$.

Proposition 1. Dans un espace métrique on a équivalence entre la densité et la densité séquentielle.

On se place dorénavant dans le cadre d'un espace (X, d) métrique, le cas général étant d'un intérêt moindre.

1.2 Premiers exemples simples

Exemple 1. [2] Les matrices diagonalisables sont denses dans les matrices trigonalisables. Les matrices inversibles sont denses dans les matrices (vrai pour K).

Application 1. Redémonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Exemple 2. [3] Les fonctions affines sont denses dans l'ensemble des fonctions convexes. On peut même choisir la suite croissante.

Application 2. [3] Inégalité de Jensen vraie sur les fonctions affines donc vraie pour les fonctions convexes.

Exemple 3. [4] Les fonctions en escalier (resp. affines par morceaux) sont denses dans les fonctions continues par morceaux (resp continues)

Application 3. [4] On définit donc facilement l'intégrale de Riemann des fonctions continues par morceaux à valeurs dans un Banach: il suffit de considérer le sup des intégrales sur les fonctions en escalier inférieures à la fonction.

Exemple 4. Les matrices unipotentes sont denses dans l'ensemble des matrices complexes dont le spectre est inclus dans S_1 .

1.3 Densité et continuité

Proposition 2. Si deux fonctions continues coïncident sur un sous-espace dense alors elles coïncident sur E tout entier.

Application 4. [1] La différentielle du déterminant est $d(\det(X))(H) = \text{Tr}({}^t(\text{Com}A)H)$.

Application 5. $\ln(2) = \sum_1^\infty (-1)^{n+1}/n$. (partie dense = simplement partie privée d'un point ici)

Application 6. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la fonction qui a une matrice associée son polynôme caractéristique est continue. On en déduit par densité $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

1.4 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Théorème 1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Application 7. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et f une fonction additive et bornée sur la boule unité. Alors f est nécessairement linéaire et continue.

Théorème 2. Tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit de la forme $A\mathbb{Z}$ soit dense.

Corollaire 1. Si on prend deux nombres p et q tel que leur rapport soit irrationnel, alors $p + q\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Application 8. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\sin(n)$ est l'ensemble $[-1, 1]$ tout entier. de même pour la suite $\cos(n)$.

1.5 Espaces séparables

Définition 2. Un Espace métrique est dit séparable ssi il admet une suite dénombrable dense.

Les espaces séparables jouent un rôle important en analyse.

Proposition 3. Tout espace métrique précompact est séparable: il suffit de prendre les centres des boules d'un recouvrement fini par des boules de rayon $1/n$ et de faire l'union sur n .

Proposition 4. Les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$ sont séparables sauf pour $p = \infty$. l'ensemble des fonctions mesurables pour la mesure de Lebesgue est séparable.

Définition 3. Soit E un evn. Famille totale: famille e_i telle que $\overline{\text{vect}(e_i)} = E$.

Proposition 5. Un evn est séparable ssi il admet une famille totale.

2 Applications des résultats de densité dans les espaces métriques complets

2.1 Propriété de Baire

Théorème 3. Tout espace métrique complet est de Baire, ie. une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense (une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide)

Application 9. Gourdon toute suite de fonction continues d'un Banach vers un Banach convergeant simplement converge en fait uniformément sur un $G - \delta$ dense.

Application 10. L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est un $G - \delta$ dense.

Application 11 (Kitai). Soit E un Banach et T un opérateur. Un point est hypercyclique ssi $T^n(x)$ est dense dans E . $HC(T)$ = ensemble des points hypercycliques. Si E est séparable, et si il existe deux parties denses X et Y , et S une application de Y dans Y telle que :

1. Dans X , $T^n(x)$ tend vers 0
2. Dans Y même chose pour S
3. Dans Y , $TS = Id$.

Alors $HC(T)$ dense dans E .

Application 12. [5] Soit φ une application de classe C^∞ vérifiant que pour tout x , il existe n tel que $\varphi^{(n)}(x) = 0$. Alors φ est un polynôme.

Application 13. [5] Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout n , $f(nx)$ tend vers 0. Alors f tend vers 0 en ∞ .

2.2 Banach-Steinhaus et applications

Théorème 4. Soit T_i une famille d'al continues d'un Banach E dans un evn F . Alors soit $\sup \|T_i\| < \infty$, , soit il existe un $G - \delta$ dense tel que pour tout x dans X , $\sup \|T_i(x)\| = +\infty$.

Application 14. Toute application bilinéaire de $E \times F$ vers G avec E, F, G Banach continue séparément par rapport à chacune des variables est globalement continue.

Application 15. Il existe un $G - \delta$ dense de fonctions telles que la série de Fourier en 0 diverge.

Corollaire 2 (Théorème de l'application ouverte). Toute application linéaire surjective d'un Banach vers un Banach est ouverte.

Application 16. Toute application linéaire continue bijective est un isomorphisme.

2.3 Prolongement de fonctions uniformément continues et applications

Théorème 5. Soit deux espaces métriques E et F , avec F supposé complet. Soit X une partie dense de E . Soit f une fonction u.c sur X . Alors il existe un unique prolongement de f sur E tout entier, et ce prolongement est encore uniformément continu.

Application 17 (Ascoli). Soit K un espace métrique compact et Y un espace métrique. Les parties relativement compactes sont exactement les parties équicontinues.

Corollaire 3. Soit E un evn et F un Banach. Soit X un sev dense de E . Soit f une application linéaire continue de X dans F de norme subordonnée $|||f|||$. Alors il existe un unique prolongement de f sur E , ce prolongement est encore linéaire continu de norme subordonnée $|||f|||$.

Application 18. $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ étant un sous espace vectoriel dense de $L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut prolonger la transformée de Fourier en une application linéaire continue de L^2 sur lui-même. De plus on montre que cette application est une isométrie bijective (formule de Parseval).

3 Densité dans les espaces de fonctions

3.1 Applications du théorème de Stone-Weierstrass

Théorème 6. Soit K un espace métrique compact, et A une sous-algèbre de $C^0(K, \mathbb{R})$ qui sépare les points de X et telle que $\forall x$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq 0$. Alors A est dense dans $C^0(K, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme. Ce théorème marche encore dans le cas complexe si on suppose l'algèbre stable par conjugaison.

Application 19. Soit trois points non alignés a_i du plan. On pose f_i la fonction $\|x - a_i\|$. Montrer que toute fonction numérique sur $\mathbb{R}^2$ est limite d'une suite de polynômes sans termes constants de ces fonctions.

Application 20. Calcul fonctionnel continu dans les C^* -algèbres.

Application 21. Soit E un espace compact. On suppose qu'il existe n éléments qui séparent les points de E . Alors E est isomorphe à une partie de $\mathbb{R}^n$.

Application 22. $C(K, \mathbb{K})$ est séparable.

Application 23. Densité des polynômes pour les fonctions C^k et la norme associée.

Application 24. CHAMBERT LOIR page 18-19: si on suppose que $[a, b]$ est inclus dans de entiers consécutifs, on peut restreindre les polynômes à des coef entiers.

Corollaire 4. Les polynômes sur $[a, b]$ sont denses dans les fonctions continues. Les polynômes trigonométriques sont denses pour les fonctions périodiques.

Application 25. [5][6] Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout n , $\int f t^n = 0$. Alors f est nulle. Soit f une fonction continue de $[-a, a]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout n , $\int f t^{2n} = 0$. Alors f est nulle. Soit f une fonction continue de $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout n , $\int f t^{2n} = 0$. Alors $f = 0$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ semi-convergente telle que $I_n := \int f(t) e^{-nt} = 0$ pour tout n . Alors f est nulle.

Application 26. [6] Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que pour tout polynôme u d'intégrale nulle, on a $\int f u = 0$. Alors f est cste. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que pour tout polynôme vérifiant $u(a) = u(b)$, on a $\int f u = 0$. Alors $f = 0$.

Application 27. L'ensemble des fonctions $P(x)e^{-x}$ est dense pour la norme uniforme dans l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ tendant vers 0 en $+\infty$.

Application 28 (critère de Weyl). [6] Soit u_n une suite de $[0, 1]$. Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose $X_n(a, b) = \text{Card}\{k \leq n | u_k \in [a, b]\}$. On a les équivalences suivantes:

1. $X_n(a, b)/n$ tend vers $b-a$ pour tout (a, b) .
2. Pour toute fonction f continue la moyenne des $f(u_k)$ cv vers l'intégrale entre 0 et 1 de f .
3. pour tout p non nul, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2ipu_k \pi} = 0$.

Application 29. Les polynômes trigonométriques forment une famille totale de l'espace $L^2[0; 2\pi]$.

Application 30. Calcul fonctionnel continu: il existe un unique morphisme d'algèbre de Banach unitaires complexes entre les fonctions continues sur le spectre de A et $L(H)$ qui envoient l'identité sur le spectre de A sur A justement.

THEOREME TAUBERIEN FORT DU ZQ

3.2 "La machine standard"

Le théorème fondamental est le suivant:

Théorème 7. Les fonctions en escalier sont denses dans l'ensemble des fonctions mesurables. On peut même choisir la suite de fonction croissante si l'on suppose la fonction mesurable que l'on cherche à approcher positive.

Raisonnement par la "machine standard": on veut montrer un résultat "linéaire" pour un espace de fonctions comme $L^1 \dots$

1. On montre que c'est vrai pour les indicatrices
2. On en déduit que c'est vrai pour les sommes d'indicatrices
3. On montre en utilisant le théorème de convergence monotone que c'est vrai pour les fonctions mesurables positives
4. On utilise f^+ et f^- pour montrer le résultat voulu.

Application 31 (Riemann-Lebesgue). Soit f une fonction L^1 . Alors $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{itx} dx \rightarrow 0$ quand t tend vers ∞ ou $-\infty$.

Application 32. [3][Formule de l'espérance] Soit X une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit h une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors on a $h(X) \in L^1(\Omega) \Leftrightarrow h \in L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{\Omega} h(X(\Omega)) d\mu = \int_{\mathbb{R}} h(x) dP_X(x)$ où dP_X est la mesure image par la fonction X , ie $dP_X(B) = \mu(X^{-1}(B))$ avec B un borélien.

Application 33 (variables indépendantes). Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires. Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes alors XY est aussi dans L_1 et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Si X et Y sont dans L^2 et sont indépendantes, Alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

3.3 Applications de la densité des fonctions régulières

Théorème 8. *Les fonctions C^∞ à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p < \infty$. Les fonctions C^∞ sont denses dans Ω avec $c\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Ce résultat a un nombre de conséquences innombrables.

Application 34. *On a équicontinuité en moyenne des fonctions sommables: pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < \infty$, $\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)| dx = 0$.*

Application 35 (Changement de variable). *On change de variable*

Application 36. *Soit f et g dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors $f * g$ est défini pour tout x , et c'est une fonction continue nulle à l'infini satisfaisant $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.*

Application 37 (Lemme fondamental des variations). *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ telle que pour toute fonction C^∞ à support compact, on ait $\int f(x)u(x)dx = 0$. Alors $f = 0$. Autrement dit Les distributions associées à des fonctions L^1_{loc} sont égales ppssi elle le sont au sens des distributions. Si une fonction L^1 est telle que sa dérivée au sens des distributions est nulle, alors elle est constante pp.*

Application 38. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $W^{1,p}$ (ie sa dérivée au sens des distributions est dans L^p). Alors f est pp égale à une fonction continue u et $\int_x^y f'(x) = u(y) - u(x)$.*

4 Bases hilbertiennes

Mettre accent sur l'utilité de :

1. La base de vecteurs propres du laplacien dans l'étude des EDP
2. La densité des polynômes orthogonaux pour montrer la convergence des méthodes de Gauss
3. la densité des polynômes trigonométriques, très utiles pour les problèmes de séries de Fourier (petits résultats du gourdon avec Plancherel)

4.1 Généralités

4.2 Hilbert séparables

4.3

References

- [1] Rouvière
- [2] Gourdon algèbre
- [3] probability with martingales
- [4] Choquet
- [5] Gourdon analyse
- [6] FGN analyse 2