

203. Utilisation de la notion de compacité

Pierre Lissy

May 29, 2010

1 Brefs rappels sur la compacité

1.1 Définition générale

Définition 1. Soit (X, T) un espace topologique. Il est dit compact ssi il est séparé et que de toute recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Une partie d'un espace topologique est dite compacte ssi elle est compacte pour la topologie induite.

- Proposition 1.**
1. Un espace compact est fermé
 2. On a identité entre les fermés d'un compact et les compacts d'un compact.
 3. Toute suite d'un compact admet une valeur d'adhérence
 4. Un espace compact est complet

Théorème 1 (Tychonov). Tout produit d'espace compact (muni de la topologie produit) est compact.

Définition 2. Une partie d'un espace topologique est relativement compact ssi son adhérence est compacte.

1.2 Compacité dans un espace métrique

Proposition 2. Dans un espace métrique tout compact est borné.

Proposition 3. Les fermés bornés d'un evn de dim finis sont exactement les compacts.

Théorème 2. (X, d) compact ssi toute suite admet une sous-suite convergente.

Corollaire 1. Une partie A de (X, d) est relativement compacte ssi toute suite de A converge dans X .

Définition 3. Un espace est dit précompact ssi on peut le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon aussi petit que l'on veut.

Proposition 4. précompact + complet $\Leftrightarrow$ compact.

Remarque 1. Dans un espace complet, précompact équivaut à relativement compact.

Définition-proposition 1. Un espace topologique est dit localement compact ssi tout point admet un voisinage compact. Ceci équivaut à dire que tout point admet une base de voisinages compacts.

Théorème 3 (Riesz). Un espace vectoriel normé (ou plus généralement un evt) est localement compact ssi il est de dimension finie.

2 Compacité et continuité

2.1 Applications de la compacité de l'image d'un compact

Proposition 5. L'image d'un compact par une fonction continue est compacte. Notamment toute fonction d'un compact dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Application 1. Dans un espace métrique, toute application contractante d'un compact dans lui-même admet un point fixe.

Application 2 (Théorème de Rolle). : on considère une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur (a, b) telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in (a, b)$ tq $f'(c) = 0$. On en déduit le théorème des accroissements finis, puis Taylor, la formule d'inversion locale, etc.

Application 3 (Théorème de Darboux). *Si on considère une fonction dérivable alors $f'(I)$ est un intervalle.*

Application 4. *Toute application continue bijective d'un compact vers un autre est un homéomorphisme.*

Application 5. *Toute application continue d'un evn de dimension finie qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers ∞ est minorée et atteint sa borne inférieure.*

Théorème 4. *Toute fonction sci d'un compact atteint sa borne inférieure. Donc toute fonction sci d'un evn de dimension finie qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers ∞ est minorée et atteint sa borne inférieure.*

Application 6. [1][page 138-139] *La longueur d'une courbe continue est une fonction sci. On en déduit par exemple que dans un espace métrique compact, si on se donne deux parties fermées disjointes de A et B , alors si k désigne la borne inférieure des longueurs des courbes rectifiables à extrémité dans A et B , il existe un arc simple de longueur k d'extrémité dans A et B .*

2.2 Application de la compacité à l'étude des applications continues fermées

Définition 4. *Une application est fermée ssi l'image de tout fermé est un fermé.*

Lemme 1. *Soit (x_n) une suite convergente de (X, d) métrique vers x . Alors $\{x_n\} \cup \{x\}$ est compacte.*

Application 7. *Une application continue est fermée si la réciproque de tout compact est un compact.*

Application 8. *Toute fonction polynomiale est fermée.*

2.3 Applications du théorème de Heine

Théorème 5. *Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

Application 9. *Soit $f : [a, b] \times [c, d] \Rightarrow E$ avec E Banach. On suppose f continue. Alors $F : x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$ est continue.*

Application 10. *Toute fonction continue est limite uniforme de fonctions affines par morceaux. Toute fonction continue est limite uniforme de fonctions en escalier.*

Application 11. *Equicontinuité en moyenne des fonctions L^1, L^∞ . Approximation par convolution, c'est archi important.*

2.4 Applications du théorème d'Ascoli-Arzelà

Théorème 6 (Ascoli-Arzelà). *Les sous-ensembles compacts de $C(X, Y)$ avec X et Y métriques compacts sont les parties équi continues*

Ce théorème sert à montrer que des sous-espaces de certains espaces vectoriels sont nécessairement de dimension finie, grâce au théorème de Riesz.

Application 12. [1] *Tout sous-espace vectoriel fermé de $C([0, 1], \mathbb{R})$ constitué de fonctions dérivables est de dimension finie.*

Application 13. [2] *Tout sous-espace fermé des fonctions lipschitziennes d'ordre α est de dimension finie.*

Application 14 (Cauchy-Arzelà-Peano). [2][page 360] *Soit f une fonction continue $I \times \Omega$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x_t = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une solution locale.

Le théorème D'Ascoli permet de montrer qu'un certain nombre d'inclusions sont compactes.

Application 15. [2][page 276, 284] *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors l'injection $C^k(K) \subset C^0(K)$ est compacte. Plus généralement si $k + \alpha > k' + \alpha'$ alors l'injection $C^{k', \alpha'}(K) \subset C^{k, \alpha}(K)$ est compacte.*

Application 16. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors l'injection $H^1(\Omega) \subset L^2$ est compacte.*

Application 17.

Théorème 7 (Montel). *Toute famille de fonctions holomorphes bornée (au sens de la métrique définissant la topologie de la convergence uniforme sur tout compact) est relativement compacte.*

Application 18 (théorème de Riemann). [7][chapitre 14] Tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ est bijectif holomorphe avec la boule ouverte unité. Donc dans $\mathbb{C}$ tout ouvert simplement connexe est contractile.

Application 19 (Cartan). [2] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, et $f \in H(\Omega, \Omega)$, telle que $f(a) = a$. On appelle f_n le n -ième itéré de f . Alors

1. $|f'(a)| \leq 1$
2. $|f'(a)| = 1 \Rightarrow f \in \text{Aut}(\Omega)$
3. $|f'(a)| < 1 \Rightarrow f_n \rightarrow \text{CVU vers la fonction constante égale à } a$.

HEINE SERT DANS FEJER

2.5 Application de la compacité des groupes topologiques classiques

Proposition 6. Les groupes O_n, SO_n, U_n, SU_n sont compacts.

Application 20. [9] On a les homéomorphismes suivantes:

1. $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n \times S_n^{++}$
2. $GL_n^+(\mathbb{R}) \simeq SO_n \times S_n^{++}$
3. $GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n \times H_n^{++}$
4. $GL_n^+(\mathbb{C}) \simeq SU_n \times H_n^{++}$

Application 21. [9] On appelle D l'ensemble des matrices diagonales à coefficients positifs de déterminant 1, et soit T l'ensemble des matrices triangulaires supérieures ayant des 1 sur la diagonale. Alors $SL_n(\mathbb{R}) \simeq SO_n \times D \times T$.

3 Compacité et convexité

3.1 Théorème de séparation de Hahn-Banach

3.2 Applications de la topologie faible

Le théorème fondamental est le suivant:

Théorème 8. Les convexes fermés forts sont exactement les convexes fermés faibles.

Application 22. minimisation des fonctions convexes sci sur un espace réflexif. Applications à projection sur un convexe, à

Banach-Alaoglu-Bourbaki: applications aux mesures invariantes du ZQ, applications aux problèmes d'EDP via le théorème d'Aubin-Lions, Un opérateur compact transforme une suite faiblement convergente en une suite fortement convergente: utilisation du coup du fait qu'une suite qui converge faiblement dans H^1 converge fortement dans L^2 . Cf TD 4: On considère le système linéaire perturbé suivant : $-\varepsilon \Delta u + u = f = 0$ sur Ω et nul sur le bord. Si f est L^2 on a convergence forte L^2 (commencer par la convergence faible). Si F est H^1 on a la convergence forte H^1 . (problème passage limites EDP: très important à relier à la physique). cf M0PSI EDP: on démontre Poincaré par l'absurde avec RELICH. Page 30: utilisation estimation a priori pour passage à la limite dans une convergence faible.

3.3 Théorème du point fixe de Brouwer et Schauder, et applications

Théorème 9 (Brouwer). Toute fonction continue d'un compact convexe d'un espace euclidien dans lui-même admet un point fixe.

En utilisant Le théorème du point fixe de Brouwer et la précompacité on démontre:

Théorème 10. Toute fonction continue d'un compact convexe d'un Banach dans lui-même admet un point fixe.

Les applications du théorème de Schauder ne sont pas immédiates.

Application 23. Raisonnement par compacité pour les EDP via le théorème d'Aubins-Lions.

Application 24. *Résultat de controllabilité sur les EDO*

Application 25. *démonstration via le théorème de Brower d'un lemme sur les matrices positives du Serre.*

Application 26. *Application sur le champ rentrant du Rouvière*

Application 27. *Non rétraction.*

Application 28. *Problème aux limites $-\Delta u = f(u)$ avec $u \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in C^0(\Omega) \cup L^\infty$.*

4 Opérateurs compacts. Exemples et applications

Dans toute cette partie on se place sur un Banach E ou sur un Hilbert H .

4.1 Définitions, premières propriétés

Définition 5. *Un opérateur est dit compact ssi l'image de la boule unité est relativement compacte.*

Théorème 11. *Soit H un Hilbert séparable. Alors tout opérateur compact admet une base hilbertienne de vecteurs propres.*

Application 29. *Diagonalisation du Laplacien et applications aux EDP*

Application 30. *Problème de Storm-Liouville*

PENSER AUX SUITES D'UN COMPACT AYANT UNE UNIQUE VALEUR D'ADHERENCE: applications multiples (topologie faible Hilbert: on considère un espace de Hilbert V et une tour d'ev de dim finie: $\dim(V_n) = p_n$, inclusion et union dense. Alors On a par LM unicité à chaque fois d'un u_n tel que pour tout v , $a(u_n, v) = l(v)$. On a la bornitude des u_n donc on extrait une suite qui cv faiblement, on montre qu'elle converge nécessairement du coup vers u solution du pb de Lax-Milgram global et on en déduit par un théorème assez connu (suite d'un compact qui a une unique valeur d'adhérence). Enfin, on montre par la coercivité de l'application que la convergence est en fait forte.) Autre applications: trucs débiles de suite cf fgn. Encore une autre application: décomposition polaire. Autre application: toute application continue bijective d'un compact vers un autre est un homéo (même argument). Autre application:

References

- [1] Choquet topologie
- [2] Zuily-Queffelec
- [3] Ramis analyse
- [4] Gourdon analyse
- [5] fgn analyse 1
- [6] objectif agrégation
- [7] Rudin
- [8] Brezis
- [9] Mnémé-Testard
- [10] Hauchecorne
- [11] Rouvière