

204:connexité.Exemples et applications.

Pierre Lissy

May 29, 2010

1 Les différentes notions de connexité.

1.1 Définitions

Définition 1. *soit X un espace topologique. X est dit connexe ssi il vérifie une des propriétés équivalentes suivantes:*

1. *Il n'existe pas de partitions de X en deux ouverts disjoints non vides*
2. *Il n'existe pas de partitions de X en deux fermés disjoints non vides*
3. *Tout ensemble à la fois ouvert et fermé est égal à X ou l'ensemble vide*
4. *Toute fonction continue de X dans $\{0,1\}$ est constante.*

Une sous-partie de X , notée A est dite connexe ssi elle vérifie une des propriétés équivalentes précédentes.

Exemple 1. $\mathbb{Q}$ n'est pas un espace connexe. Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe. Dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points ayant une coordonnée irrationnelle est connexe.

Définition 2. *Soit X un espace topologique. X est dit connexe par arcs ssi pour tout couple de points (a,b) , on peut trouver un chemin continu f de $[0,1]$ dans X tel que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.*

Exemple 2. *Tout segment est connexe par arcs. Tout pavé de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs. Tout complémentaire d'un pavé en dimension supérieure ou égale à 2 est connexe par arcs. Une couronne dans $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs.*

Définition 3. *Un espace X métrique est dit bien enchainé ssi pour tout $\varepsilon > 0$ et tout points x et y on peut trouver une chaîne de pas plus petit que ε qui joint x et y*

Définition 4. *Un espace est simplement connexe ssi tout lacet fermé est strictement homotope à un point.*

Proposition 1 (Théorème de passage à la douane). *Toute partie connexe qui rencontre à la fois l'intérieur et l'extérieur d'une partie rencontre sa frontière.*

1.2 Constructions d'espaces connexes

Proposition 2. [1] *Toute partie comprise entre une partie X et sous adhérence $\bar{X}$ est connexe. En particulier $\bar{X}$ est connexe*

Proposition 3. [1] *On considère un ensemble A_i de parties connexes telles que l'intersection de chacun des A_i avec un A_{i_0} est non vide. Alors $\bigcup A_i$ est connexe. Idem connexe par arcs.*

Proposition 4. [1] *On considère un ensemble au plus dénombrable de connexes telles qu'on a $C_{i-1} \cap C_i \neq \emptyset$. L'union est connexe.*

Proposition 5. [2] *Un produit d'espace est connexe ssi chacun des espaces l'est.*

Proposition 6. [1] *L'image continue d'un connexe est connexe.*

Corollaire 1. [2] *Tout espace quotient d'un espace connexe est connexe.*

1.3 Lien entre les différents types de connexité

Proposition 7. *[1] Convexe dans un evn $\Rightarrow$ étoilé $\Rightarrow$ Simplement connexe $\Rightarrow$ cpa $\Rightarrow$ connexe $\Rightarrow$ bien enchainé dans un espace métrique. Connexe par lignes brisées dans un evn $\Rightarrow$ cpa.*

Réciproques fausses en général.

Exemple 3. *L'adhérence du graphe de la fonction $\sin(1/x)$ sur $[0, 1]$ est connexe mais non connexe par arcs. Dans $\mathbb{R}^2$, le peigne est connexe sans être connexe par arcs.*

Exemple 4. *Une couronne dans $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs mais non simplement connexe, $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine n'est pas simplement connexe.*

Exemple 5. *on considère la partie comprise entre une hyperbole et ses axes, privé du point au coin. Simplement connexe mais non étoilée.*

Exemple 6. *$\mathbb{Q}$ bien enchainé mais non connexe.*

Quelques exemples positifs.

Exemple 7. *$\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathbb{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ convexes donc cpa et connexes.*

On a les réciproques suivantes importantes.

Proposition 8. *E espace métrique compact bien enchainé $\Rightarrow E$ connexe.*

Proposition 9. *Tout ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par lignes brisées, et même par lignes brisées parallèles aux axes de coordonnées.*

1.4 Exemples d'espaces connexes

Théorème 1. *Les espaces suivants sont connexes:*

1. $GL_n(\mathbb{C})$
2. $S_n(\mathbb{R})$
3. $H_n(\mathbb{C})$

2 Composantes connexes. Espaces localement connexes

2.1 Composantes connexes

Définition-proposition 1. *La relation suivante: $x \sim y$ ssi x et y sont dans un même ensemble connexe de X est une relation d'équivalence. On dit que x et y sont connectés. Les classes d'équivalences pour cette relation sont appelées composantes connexes?*

Proposition 10. *Les composantes connexes sont toujours fermées. La composante connexe d'un point x est la réunion des parties connexes contenant x .*

Exemple 8. *Composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$: deux, les matrices à $\det > 0$ et celles < 0 .*

Proposition 11. *La composante connexe d'un point d'un espace produit est le produit des composantes connexes.*

Définition 5. *Un espace est dit totalement discontinu ssi toutes les composantes connexes sont réduites à un point.*

Exemple 9. *$\mathbb{Q}$ est totalement discontinu, de même que son complémentaire.*

Proposition 12. *Un espace discret est totalement discontinu. Un produit d'espaces totalement discontinu est totalement discontinu.*

2.2 Espaces localement connexes

Définition-proposition 2. *Un espace est localement connexe ssi il vérifie une des deux propriétés équivalentes suivantes:*

1. *Tout point possède une base de voisinages connexes*
2. *Tout ouvert de E a des composantes connexes ouvertes et fermées*

Corollaire 2. *Un espace localement connexe est tel que toutes les composantes connexes sont ouvertes et fermées.*

Exemple 10. *Une réunion disjointe finie ou dénombrables d'intervalles de $\mathbb{R}$ gardant un intérieur d'une taille minimale est localement connexe.*

Définition 6. *Un espace est localement cpa ssi tout point admet une base de voisinages cpa.*

Définition 7. *Un espace localement cpa et connexe est cpa. S'il n'est pas connexe, chacune de ses composantes connexes est ouverte, fermée, et cpa.*

3 Utilisation de la notion de connexité

3.1 Applications aux questions d'homéomorphie

Théorème 2. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont non homéomorphes (alors qu'il existe une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$). De manière générale $\mathbb{R}^1$ et $\mathbb{R}^m$ sont non homéomorphes. En fait, n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}$ ne peut être homéomorphe à un domaine de $\mathbb{R}^m$.

Corollaire 3. [3] *Un arc simple dans $\mathbb{R}^n$ est d'intérieur vide.*

3.2 Passage du local au global

Théorème 3 (inversion locale). *On suppose f continuellement différentiable en a et que la différentielle est un isomorphisme. Alors f est localement inversible.*

Théorème 4 (inversion globale). *Soit E et F deux espaces de Banach, et f une application de classe C^1 de U dans F injective. On suppose qu'en tout point la différentielle est un isomorphisme (ie continue et réciproque continue). Alors f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$.*

Définition 8. *Une application f est dite localement constante ssi en tout point il existe un voisinage sur lequel f est constante.*

Proposition 13. *Une application localement constante est constante sur les composantes connexes.*

Théorème 5. *Toute application différentiable sur un ouvert U d'un Banach de différentielle nulle est localement constante donc constante sur les composantes connexes de U .*

Théorème 6 (Hadamard-Levy). *Une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même ssi f est propre et $\forall x, df(x)$ est inversible.*

3.3 Applications aux fonctions holomorphes

Théorème 7. *Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe. Alors l'intégrale de f sur n'importe quel contour fermée est nulle, l'intégrale sur un chemin ne dépend que des extrémités des chemins, et f admet une primitive holomorphe sur U .*

Ces théorèmes sont faux si on suppose U seulement connexe ou cpa.

Exemple 11. *Si on intègre $1/z$ sur un cercle centré en 0 on obtient $2i\pi$.*

Théorème 8 (zeros isolés). *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U . Alors les zeros de f sont isolés (ie on peut trouver des voisinages qui les sépare). Il y a donc un nombre fini de zéros sur tout compact inclus dans U .*

Corollaire 4 (prolongement analytique). *Si deux fonctions holomorphes f et g définies sur U coïncident sur un ensemble admettant un point d'accumulation, alors f et g coïncident sur U . Si g est défini sur un ouvert plu petit que U alors on peut prolonger g par f sur U .*

3.4 Applications aux EDO et EDP

Théorème 9 (Cauchy-Lipschitz). *On considère un problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(0) = x_0 \in F$ où F est un espace de Banach. Ce problème de Cauchy admet une solution locale unique. Elle admet donc une unique solution maximale?*

Théorème 10. *On considère le problème de Cauchy suivant dans $\mathbb{R}^n$: $iu_t - \Delta u = P(u, \bar{u})$ avec $u(0, x) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et P un polynôme à deux variables, et $s < n/2$. Ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale, de plus cette solution u est dans $\mathbb{C}^0(I, H^s)$ où I est l'intervalle de définition.*

Théorème 11 (inversion globale holo). *Une fonction holomorphe est biholomorphe ssi elle est injective.*

3.5 Applications algébriques

Théorème 12. $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

References

- [1] Gourdon analyse
- [2] Schwartz
- [3] Choquet