

205. Espaces complets. Exemples et applications

Pierre Lissy

May 29, 2010

Dans tout ce qui suit, (E, d) désigne un espace métrique et $(F, ||\cdot||)$ un evn, $(H, <, >)$ un Hilbert.

1 Définitions et premiers exemples

1.1 Suites de Cauchy

Définition 1. Une suite (x_n) de E est dite de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} | n, m \geq N \rightarrow (x_n, x_m) \geq \varepsilon$

Proposition 1. $(x_n) \text{ CV} \rightarrow (x_n) \text{ de Cauchy} \rightarrow (x_n) \text{ bornée. Réciproques fausses en général.}$

Exemple 1. $E = \mathbb{R}$, $x_n = (-1)^n$ est bornée mais pas de Cauchy. $E = (0, 1]$, $1/n$ est de Cauchy mais pas convergente dans E . Cet exemple semble artificiel puisqu'on retire l'éventuel limite de l'espace de définition mais en fait on verra après qu'il ne l'est pas (tout espace est plongé dans un espace métrique complet)

Proposition 2. Toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

Remarque 1. Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est encore une suite de Cauchy

1.2 Espaces complets et espaces de Banach

Définition 2. (E, d) est un espace complet ssi toute suite de Cauchy de E est convergente.

Définition 3. Un evn est dit de Banach ssi il est complet pour la distance associée à la norme.

Exemple 2. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets, contrairement à $(0, 1)$ et $\mathbb{Q}$.

Remarque 2. La complétude est une notion métrique et non topologique: $d(x, y) = |x - y|$ et $d(x, y) = |1/x - 1/y|$ définissent la même topologie sur $(0, 1]$ qui est complet pour la deuxième norme. (Gourdon analyse)

Définition 4. f de A dans F vérifie le critère de Cauchy en $a \in \bar{A}$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 | (x, y) \in B(a, \delta) \cap A \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

Proposition 3. f admet une limite quand x tend vers $a \Rightarrow f$ vérifie le critère de Cauchy en a . Réciproque vraie dans un espace complet.

Proposition 4. Dans un espace complet, toute suite décroissantes de fermés non vide de diamètre tendant vers 0 a une intersection non vide réduite à un point. Réciproque vraie.

1.3 Fabrication d'espaces complets

Proposition 5. Tout espace complet est fermé. Les sous-parties complètes d'un espace complet sont exactement les parties fermées.

Exemple 3 $(0, 1)$. est complet. S^1 est complet.

Proposition 6. Tout produit fini, dénombrable d'espaces complets (muni d'une distance définissant la topologie produit) est complet.

Exemple 4. Suites réelles, complexes = espaces complets. $\mathbb{R}^n$ complets.

Théorème 1. Soit E un espace de Banach et F un sev fermé de E . Alors l'espace quotient E/F muni de la norme habituelle (inf des normes des représentants) est un espace de Banach.

Proposition 7. Tout espace compact est complet. Tout espace localement compact est complet.

Corollaire 1. Tout evn de dim finie est complet

Proposition 8. Si f est une homéomorphie surjective u.c de E vers F complet alors E est complet. Notamment si f est une isométrie des structures uniformes de E et F ils sont simultanément complet ou non complets. Si un espace métrique est complet pour une distance, il est complet pour toute distance qui lui est équivalente (ou seulement plus forte) . Si un Banach est complet pour une norme, il est complet pour toute norme qui lui est équivalente (ou même plus forte)

Remarque 3. Si f est une surjection de E complet vers F alors F n'est pas forcément complet cf choquet

Proposition 9. Toute intersection d'espaces complets est complet; toute réunion finie d'espaces complets est complet.

1.4 Complété d'un espace métrique

CF choquet

Théorème 2. Si E est un espace métrique, on peut trouver une isométrie j qui plonge E dans un espace complet G appelé complété tel que E est dense dans G . Ce complété est unique à isométrie près.

Exemple 5. Le complété des fonctions $D(\Omega)$ pour la norme $\mathbb{L}^p$ est l'espace L^p . Soit $s > 0$, le complété des fonctions $D(\mathbb{R}^n)$ pour la norme H^s est l'espace H^s . Le complété de $D(\Omega)$ pour la norme H^s est l'espace H_0^s , qui est l'ensemble des fonctions de H^s qui sont nulles presque sûrement sur le bord de Ω .

Définition 5. Un espace est dit précompact si et seulement si son complété est un espace compact (Schwartz). Un espace précompact complet est donc compact.

Proposition 10. Un espace est précompact si et seulement si on peut le recouvrir par des boules de rayon aussi petit que l'on veut.

Application 1. L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est fermé. Un opérateur compact de E dans F est limite d'opérateurs de rang fini.

1.5 Exemples d'espaces complets

Théorème 3. F Banach $\Rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ Banach. En particulier tout dual est un Banach. Les applications multilinéaires continues à valeur dans un Banach sont aussi un espace de Banach.

Théorème 4. L'ensemble des fonctions continues bornées d'un espace topologique dans un evn de dim finie est un Banach. Notamment les fonctions continues d'un compact dans un evn de dim finie est un Banach.

Théorème 5. L'ensemble des fonctions continues d'un evn de dim finie muni de la topologie de la convergence compacte à valeur dans un evn de dim finie est un Banach.

Corollaire 2. $H(\Omega)$ est complet.

Théorème 6. Les espaces $L^p(X, \mathcal{T}, \mu)$ sont complets.

2 Utilisation de la complétude

2.1 Théorème du point fixe de Picard

Théorème 7. Toute application contractante de E dans E admet un unique point fixe qui est la limite des itérées en partant de n'importe quel point.

Remarque 4. En fait il suffit qu'un des itérés soit une contraction. Alors f admet toujours un unique point fixe.

Application 2. Rouviere Si $f(t, x)$ est continue en t localement lipschitzienne en x alors le problème de Cauchy $y_t = f(t, x)$, $y(0) = y_0$ admet une unique solution maximale.

Application 3. Equation intégrale de Fredholm. Soit K un noyau continu. $x(t) = \varphi(t) + \int_a^b K(s, t)x(s)ds$ admet une unique solution $x \in C^0([a, b], \mathbb{C})$ si $(b - a)\|K\|_\infty < 1$.

Théorème 8 (Picard à paramètres). $f : X \times E \rightarrow E$ uniformément contractante en la deuxième variable. Alors $\lambda \mapsto (\text{point fixe de } f\lambda, \cdot)$ est continue.

Application 4. Théorème d'inversion locale: si U est un voisinage ouvert de 0 sur $\mathbb{R}^n$, et f une fonction C^1 vérifiant $f(0)=0$ et $df(0)$ inversible alors f est un difféomorphisme local au voisinage de 0

2.2 Prolongement d'applications u.c.

Théorème 9. *une fonction f u.c sur une partie A admet un unique prolongement u.c. sur $\bar{A}$*

Application 5 (Ascoli). *Ascoli métrique: si X et Y sont deux compacts les parties relativement compactes de $C(X, Y)$ sont exactement les parties équicontinues.*

Application 6. *Prolongement de la transformée de Fourier. La transformée de Fourier d'une fonction $L^1 \cap L^2$ étant dans L^2 et étant une isométrie on la prolonge en une isométrie sur L^2 . De plus $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de L^2 .*

2.3 Propriété de Baire

Théorème 10. *Tout espace métrique est de Baire, ie. une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense (une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide)*

Application 7. *Gourdon toute suite de fonction continues d'un Banach vers un Banach convergeant simplement converge en fait uniformément sur un $G - \delta$ dense.*

Application 8. *L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est un $G - \delta$ dense.*

3 Espaces de Banach et applications

3.1 Banach-Steinhaus et applications

Théorème 11. *Soit T_i une famille d'al continues d'un Banach E dans un evn F . Alors soit $\sup \|T_i\| < \infty$, , soit il existe un $G - \delta$ dense tel que pour tout x dans X , $\sup \|T_i(x)\| = +\infty$.*

Application 9. *Toute application bilinéaire de $E \times F$ vers G avec E, F, G Banach continue séparément par rapport à chacune des variables est globalement continue.*

Application 10. *Il existe un $G - \delta$ dense de fonctions telles que la série de Fourier en 0 diverge.*

Application 11. *B bornée ssi B est faiblement borné, ie. pour toute forme linéaire continue $f(B)$ est borné. On retrouve le résultat vrai de dim finie qu'une partie est bornée si et seulement si elle est bornée sur chacun des axes d'un système de coordonnées.*

Corollaire 3 (Théorème de l'application ouverte). *Toute application linéaire surjective d'un Banach vers un Banach est ouverte.*

Application 12. *Toute application linéaire continue bijective est un isomorphisme.*

Application 13. *Si deux normes rendent E complet et que l'une est plus fine que l'autre alors elles sont équivalentes.*

Corollaire 4 (Théorème du graphe fermé). *Si le graphe d'une al d'un Banach dans un Banach est fermé alors cette al est continue.*

Application 14. *Tout opérateur positif d'un Hilbert est continu.*

Application 15. *Tout opérateur d'un Hilbert admettant un adjoint (pas forcément continu) est continu.*

Application 16. *Tout sev fermé des fonctions continues qui sont en plus dérivables est de dimension finie. (cf Choquet je crois)*

3.2 Hahn-Banach, topologie faible et applications

Théorème 12. *Soit p une application sous-additive 1-positivement homogène, soit G un sev et g une application de G dans $\mathbb{R}$ vérifiant $g(x) \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire prolongeant g et vérifiant encore l'inégalité précédente.*

Corollaire 5. *Si g est une forme linéaire, il existe une forme linéaire prolongeant g et de même norme*

Corollaire 6. *Si on se donne un élément de E x il existe une forme linéaire f de norme $\|x\|$ telle que $\|f(x)\| = \|x\|^2$.*

Application 17. $\|x\| = \sup(|f(x)|) = \max(|f(x)|)$ sur les f de norme plus petite que 1.

Application 18. *On note $J_b(\varphi) = \varphi(b)$. Alors $\|J_b\| = \|b\|$. J_b étant une injection, si elle est surjective on dit que l'espace est réflexif. On a alors que $b \mapsto J_b$ est une isométrie bijective de E vers E'' qui peuvent être identifiés.*

3.3 Algèbres de Banach et applications

Définition 6. On appelle algèbre de Banach une algèbre munie d'une structure d'evn avec la norme vérifiant en plus $\|e\| = 1$ et $\|uv\| \leq \|u\|\|v\|$.

Exemple 6. $L(E, F)$ muni de la norme subordonnée est une algèbre de Banach. $l^1(\mathbb{N})$ muni du produit de Cauchy est une algèbre de Banach.

Proposition 11. Dans une algèbre de Banach, si $\|x\| < \infty$, alors $\sum x^n$ CVA donc CV. Dans ce cas, $1-x$ est inversible et $(1-x)^{-1} = \sum_0^\infty x^n$. De plus, on a $\|1-x\| \leq 1/(1-\|x\|)$.

Corollaire 7. L'ensemble des inversibles d'une algèbre de Banach est un ouvert. Plus précisément, si u est inversible tous les éléments de $B(u, \|u\|^{-1})$ sont inversibles. enfin, l'application qui à u associe son inverse est un homéomorphisme involutif de A dans A .

Application 19. Le spectre d'un opérateur d'un Hilbert est un compact de $\mathbb{C}$.

Application 20. Fonction exponentielle. Soit E une algèbre de Banach. On pose $\exp(x) := \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$. Cette série est définie sur E , elle converge normalement sur toute boule de E , on $\|e^x\| \leq e^{\|x\|}$. Si A et B commutent on a $e^{a+b} = e^a e^b$. Donc e^A est inversible d'inverse e^{-A} . De plus f est de classe C^∞ et ses dérivées sont normalement convergentes sur toute boule de A . De plus on a pour tout t , $\exp(tA)_t = \exp(tA)$, et plus généralement si on a f et f' fonctions de I dans A qui commutent, on a $e_t^{f(t)} = f'(t)e(f(t))$. Ceci sert par exemple à trouver la solution de l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^n$ $y' = Ay$ avec $y(0) = y_0$: c'est $\exp(tA)y_0$.

4 Espaces de Hilbert

4.1 Définitions et exemples

Définition 7. Un espace de Hilbert réel ou complexe est un espace préhilbertien tel que la norme issue du produit scalaire rend cet espace complet.

Définition 8. Une base hilbertienne d'un espace de Hilbert est une famille orthogonale libre telle que l'adhérence de cette famille est H tout entier. C'est aussi appelé un système total.

Exemple 7. $L^2(\Omega)$ est un Hilbert, tout comme $l^2(\mathbb{Z})$. Les espaces de Sobolev H^s sont des Hilbert.

Théorème 13 (Riesz). H et H' sont isomorphes: si $\varphi \in H'$, il existe un unique f tel que $\varphi = (f, \cdot)$.

4.2 Projection sur un convexe fermé et applications

Lemme 1 (parallélogramme). $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Théorème 14. Soit C un convexe fermé. Soit f dans H . Il existe un unique point $P(f)$ minimisant la distance entre f et C , de plus ce point est l'unique vérifiant $(f - p(f), y - p(f)) \leq 0$ pour tout f dans y . Si C est un sev, l'inégalité devient une égalité. De plus la projection est 1-lipschitzienne.

Corollaire 8. Tout sev fermé admet un supplémentaire orthogonal

Application 21. Dans un Hilbert séparable, si e_n est une base hilbertienne dénombrable, alors on a $\|\sum_0^n (e, e_k)\| \leq \|e\|$. De plus $\|e\| = \sum_0^\infty \|(e_k, e)\|$. C'est l'égalité de Parseval-Bessel.

4.3 Théorème de Stampachia et de Lax-Milgram

Théorème 15. Soit a une forme bilinéaire continue et coercive. Soit K un convexe fermé non vide. Soit $\varphi \in H'$. Alors il existe un unique $u \in K$ tel que $a(u, v - u) \geq \varphi(v - u)$. De plus, si a est symétrique u est l'unique point minimisant la fonctionnelle $a/2a(v, v) - \varphi(v)$.

Corollaire 9. Soit a une forme bilinéaire continue et coercive. Soit H un sev fermé. Soit $\varphi \in H'$. Alors il existe un unique $u \in K$ tel que $a(u, v - u) = \varphi(v - u)$.

Application 22. Le système de Dirichlet homogène sur un ouvert borné Ω ($f \in L^2$)

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \\ u = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution faible dans $H_1^0(\Omega)$.

Developpements: Complété d'un espace métrique (avec d'abord la complétude de $\mathbb{R}$). [6] Prolongement de fonctions u.c. + application au théorème d' Ascoli, Banach-Steinhaus + application ouverte + isométrie + normes des Banach.

References

- [1] Schwartz distributions
- [2] Genet +++
- [3] Rudin
- [4] Brezis
- [5] Hauchecorne
- [6] Choquet