

206. Théorèmes du point fixe. Exemples et applications

Pierre Lissy

May 29, 2010

1 Théorème du point fixe de Picard et applications

1.1 Théorème de Picard

Définition 1. Soient (X, d) un espace métrique f une application de X dans X . Elle est dite contractante ssi $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Elle est dite strictement contractante ssi $\exists k < 1$ telle que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

Théorème 1 (de Picard). Toute application strictement contractante d'un espace métrique complet dans lui-même admet un unique point fixe x . De plus, x est la limite des itérations de f à partir de n'importe quel point x_0 . Enfin, la vitesse de convergence est géométrique de rapport k : $d(x, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$.

Raffinements de Picard utilisés dans les problèmes d'approximations du Sibony: en parler.

Exemple 1.

Notamment, on a le critère suivant.

Proposition 1. Soit U un ouvert d'un espace de Banach et f une application de classe C^1 de U dans F Banach. On suppose que pour tout x dans U , $\|df(x)\| \leq k$ avec $k < 1$. Alors f est strictement contractante.

Exemple 2. On considère $X = \mathbb{R}^2$, et on s'intéresse à la fonction $f(x, y) = (\sin(x+y)/2+5, \cos(x-y)/2-10)$. Elle est strictement contractante et donc elle admet un unique point fixe.

Exemple 3.

Faux si l'espace est pas complet.

Exemple 4. $f(x) = x/2$ sur $]0, 1]$ est strictement contractante mais n'a pas de point fixe

Faux si contractante seulement.

Exemple 5. $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Faux si pas contractante.

Exemple 6. $f(x) = x$: tout point est fixe.

Il existe des applications admettant un unique point fixe et non contractantes.

Exemple 7. Sur $\mathbb{R}$, on considère $f(x) = x^2 + x$. $f(x) - x = x^2$ qui vaut 0 ssi $x = 0$. 0 est donc unique point fixe mais l'application n'est pas contractante.

Proposition 2. Pour que f admette un unique point fixe, il suffit qu'un de ses itérées soit contractante. dans ce cas, la vitesse de convergence est en $k^{\frac{n}{p}}$.

1.2 Application en EDO

Définition 2. Soit Ω un ouvert de $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Soit f une fonction de $I \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ continue. On considère le problème de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $x(t_0) = x_0$. $((t_0, x_0) \in \Omega)$. On appelle solution maximale de ce problème de Cauchy toute fonction de classe C^1 vérifiant les équations et ne pouvant être prolongée sur un intervalle plus grand.

Lemme 1. x est solution du pb de Cauchy ssi x est continue et vérifie $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x(t)) dt$.

En appliquant le théorème du point fixe à la fonction $x \mapsto x(0) + \int_0^t f(t, x(t)) dt$ avec $t < T$ bien choisi on obtient

Théorème 2 (Cauchy-Lipschitz). Soit Ω un ouvert de $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Soit f une fonction de $I \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ continue localement (uniformément) lipschitzienne en espace. On considère le problème de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $x(t_0) = x_0$. $((t_0, x_0) \in \Omega)$. Alors ce problème admet une unique solution maximale.

Proposition 3. Si on impose $\Omega = I \times O$ et à la fonction f d'être globalement (uniformément) lipschitzienne en espace, on a de plus que la solution est définie sur tout I .

Corollaire 1 (Cauchy linéaire). On considère une équation du type $x'(t) = A(t)x + B(t)$ où $A : (T_0, T_1) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $B : (T_0, T_1) \times \mathbb{R}^n$ sont continues. Alors le problème de Cauchy admet une unique solution définie globalement sur $[T_0, T_1]$. De plus l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n .

En fait, on peut nettement affaiblir les hypothèses sur A et B et garder l'existence et l'unicité de solutions.

Définition 3. On considère le problème linéaire, avec A et B seulement L^∞ . On suppose ici $I = (T_0, T_1)$ fini. On appelle solution faible de l'équation différentielle $x'(t) = A(t)x + B(t)$ et $x(T_0) = x_0$ toute fonction de $H^1(I)$ qui vérifie l'équation (1) au sens des distributions, ie qui est telle que si l'on considère une fonction test φ dans $H_1(I, \mathbb{R}^n)$, on a pour tout t , $\int_{T_0}^t x' \varphi = \int_{T_0}^t Ax \varphi + b \varphi$, ie. $x(t)\varphi(t) = x(0)\varphi(0) + \int_{T_0}^t x \varphi' + Ax \varphi + b \varphi$.

Lemme 2. $H^1(I, \mathbb{R}^n) \subset C^0(I, \mathbb{R}^n)$.

Lemme 3. x est solution faible du pb de Cauchy $\Leftrightarrow x$ est continue et x vérifie $x(t) = x_0 + \int_{T_0}^t Ax + bdt$

En appliquant le théorème du point fixe à la fonction précédente on montre

Théorème 3. Le problème de Cauchy admet une unique solution globale. l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n .

1.3 Applications en EDP

Définition-proposition 1. $s \geq 0$. On appelle $H^s(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^2 \mid \int \langle \xi \rangle^{2s} \mathcal{F}(f)(\xi) d\xi < \infty\}$. On montre que c'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire déduit de la norme précédente.

Définition 4. On appelle équation de Schrödinger linéaire l'équation suivante: $iu_t - \Delta u = f, u(0, \cdot) = u_0$. Avec $f \in L^2$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Equation de Schrödinger homogène: $f = 0$.

Théorème 4. L'équation de Schrödinger homogène admet une unique solution dans $C^0(\mathbb{R}, H^s)$ notée $S(t)u_0$. $S(t)$ est appelé le propagateur. Il vérifie $S(t+t') = S(t)S(t')$. L'équation de Schrödinger non homogène admet alors une unique solution $C^0(\mathbb{R}, H^s)$: $u(t, x) = u_0(x) + \int_0^t S(t - \sigma)f(\sigma)d\sigma$.

On souhaite maintenant résoudre une équation de Schrödinger non linéaire: $iu_t - \Delta u = P(u, \bar{u}), u(0, \cdot) = u_0$ avec P une fonction polynôme qui vaut 0 en 0. On suppose $s > \frac{d}{2}$. En appliquant le théorème de Picard à l'application $u_0(x) + \int_0^t S(t - \sigma)f(u(\sigma), \bar{u}(\sigma))d\sigma$, on obtient le théorème suivant:

Théorème 5. Il existe une unique solution du problème. De plus la solution est définie globalement.

1.4 Equations intégrales

[5][page 184-185]

Théorème 6. Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact et K un noyau continu sur $I \times I$. Alors l'équation intégrale de Fredholm $x = \varphi + \int_I K(s, \cdot)x(s)ds$ admet une unique solution si $(b - a)\|K\|_\infty < 1$.

Théorème 7. $I = [a, b]$ un intervalle compact et K un noyau continu sur $I \times I$. Alors l'équation intégrale de Volterra $x(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s, t)x(s)ds$ admet une unique solution.

1.5 Théorème de Picard à paramètres

[5]

Théorème 8. Soit X un espace métrique complet, Λ un espace métrique et $F : X \times \Lambda \mapsto X$ une application continue que l'on suppose uniformément contractante en x . Alors pour tout λ il existe un unique $x(\lambda)$ point fixe et l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.

Exemple 8. On considère $X = \mathbb{R}^2$, et on s'intéresse à la fonction $f(x, y, t) = (\sin(x + y)/2 + t - 1, \cos(x - y)/2 - t + 1/2)$. Elle est continue strictement uniformément contractante en (x, y) donc elle définit une courbe continue $(x(t), y(t))$.

Faux si pas continue en le paramètre.

Exemple 9. $f(x) = 1/2x + 1$ pour $\lambda \leq 1$, $f(x) = 1/2 * x - 1$ pour $\lambda > 1$.

Faux si pas uniformément contractante.

Exemple 10.

1.6 Applications en calcul différentiel

[5]

Théorème 9 (inversion locale). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur U . Soit $a \in U$ tel que $Df(a)$ est inversible. Alors en se ramenant à un problème de point fixe pour la fonction $f(x,y)$ il existe un voisinage $V \subset U$ de a et W un voisinage ouvert de $f(a) = b$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que f soit un C^1 -difféomorphisme de V sur W .

On en déduit le théorème des fonctions implicites, le théorème d'inversion global, etc.

1.7 Stampachia et Lax-Milgram

Brezis p 83: Stampachia = conséquence du théorème du point fixe! On en déduit Lax-Milgram.

2 Théorèmes du point fixe de Brouwer, Schauder et applications

2.1 Théorème de Brouwer

Théorème 10. Toute application continue de la boule euclidienne fermée unité sur elle-même admet un point fixe.

Ce point fixe n'est pas forcément unique.

Exemple 11. Id sur la boule.

Faux sur la sphère.

Exemple 12. -Id.

Faux sur la boule ouverte.

Exemple 13. $(x_1, \dots, x_n) \mapsto ((x_1 + 1)/2, x_2/2, \dots, x_n/n)$

Application 1. [5] Soit v un champ de vecteur continu de la boule fermée unité supposé rentrant dans la sphère. Alors v s'annule en au moins un point de la sphère.

Application 2. Serre: truc matrices positives

Application 3. Raisonnement par compacité pour les EDP via le théorème d'Aubins-Lions.

Application 4. Application sur le champ rentrant du Rouvière

Application 5. Non rétraction.

2.2 Théorème de Schauder

Théorème 11. Toute application continue d'une partie convexe compacte d'un Banach dans lui-même admet un point fixe.

Faux si pas compacte même si convexe.

Exemple 14. Le shift sur la boule fermée pour la norme infinie.

Faux si pas convexe même si compact.

Exemple 15. On prend un plan, on effectue une rotation dans ce plan, sphère marche pas.

Application 6. Problème aux limites $-\Delta u = f(u)$ avec $u \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in C^0(\Omega) \cup L^\infty$.

Application 7. Résultat de contrôlabilité sur les EDO

Application 8. démonstration via le théorème de Brouwer d'un lemme sur les matrices positives du Serre.

2.3 Application à un théorème de controllabilité

On considère l'équation suivante: $x'(t) = A(t, x)x(t) + B(t, x)u(t) + f(t, x(t))$ avec A , B et f continues localement lipschitziennes bornées sur $[T_0, T_1]$. C'est une EDO à un paramètre, la fonction u .

Définition 5. La fonction u est appelé contrôle. L'équation est dite globalement contrôlable ssi pour tout état x_0 et x_1 , on peut trouver un contrôle u qui nous amène de x_0 à x_1 , ie tel que la solution du problème de Cauchy $x(T_0) = x_0$ vérifie $x(T_1) = x_1$.

On pose $C_z = \int_{T_0}^{T_1} R_z(T_1, t)B(t)^t B(t)^t R_z(T_1, t)dt$ où R_z est la résolvante du système $x'(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + f(t, x(t))$. Evidemment maintenant on n'a plus qu'à se ramener à un problème de point fixe de Schauder en tentant de rendre z égal à x .

Théorème 12. On suppose tous les C_z inversibles et que la norme matricielle des inverses est bornée. Alors le système est contrôlable.

2.4 Application à l'étude des EDO

Théorème 13 (Cauchy-Peano). On considère une fonction f seulement continue. Alors l'équation $x' = f(t, x)$ avec $x(0) = x_0$ admet au moins une solution.

Pas forcément unicité.

Exemple 16. $[2]y' = 2y^{1/2}$, $y(0) = 0$ admet deux solutions maximales: 0 et t^2 .

3 Autres théorèmes du point fixe

3.1 Théorème de point fixe dans un compact

Contractante ETC.

3.2 Théorème du point fixe de Kakutani

A prendre dans le Mneimé-Testard. On en déduit par exemple: existence de mesure de Haar. Existence d'une mesure invariante pour la matrice de transition d'une chaîne de Markov. Théorie des jeux:

References

- [1] Choquet topologie
- [2] Zuily-Queffelec
- [3] Gourdon analyse
- [4] objectif agrégation
- [5] Rouviere
- [6] Coron