

207:prolongements de fonctions. Exemples et applications

Pierre Lissy

May 29, 2010

1 Propagations des régularités d'une fonction définie sur un segment privé d'un point

1.1 Prolongement par continuité

Proposition 1. *On considère un espace topologique E et un autre séparé F . On considère une fonction définie sur un sous-espace A et continue. Alors il existe au plus un prolongement continu à $\bar{A}$.*

Ce prolongement n'existe pas toujours.

Exemple 1. *La fonction $1/x$ ne peut se prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$*

Même si borné par vrai

Exemple 2. *$\sin(1/x)$*

Théorème 1. *On considère une application continue d'une partie dense A d'un espace métrique (E, d) vers F, d et continue se prolonge de manière unique en une fonction si pour tout $x \in E/A$, la limite de f selon A existe.*

Proposition 2. *[6] On considère la fonction taux d'accroissement: $f(x) - f(y)/x - y$. Si f est C^1 la fonction est prolongeable par continuité.*

1.2 Prolongement de classe C^1

Théorème 2. *[6] On considère un intervalle privé d'un point (ou l'extrémité d'un intervalle). On considère une fonction à valeur dans un espace de Banach dérivable sauf en ce point. Alors si la limite de la dérivée en ce point vaut a , la fonction est dérivable en ce point et $f'(x_0) = a$. Idem de classe C^1 .*

trouver d'autres choses et une application.

1.3 Ordres supérieurs

Ca ne fonctionne pas aussi bien en général.

Théorème 3 (Borel). *[8] On considère une suite de réels. Il existe une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(k)}(0) = a_k$.*

Corollaire 1. *Toute fonction de classe C^∞ sur un compact $[a, b]$ admettant des dérivées à tout ordre à gauche en b et à droite en a se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

Application 1. *Toute fonction paire f est telle qu'il existe g , $f(x) = g(x^2)$.*

Théorème 4. *[7] On considère une application g de classe C^∞ nulle en 0. Alors $g(x)/x$ se prolonge en une application C^∞ et g admet une racine carrée C^∞ pour peu qu'elle soit positive et que $f''(0)$ non nul.*

Finissons sur un théorème d'interpolation.

Théorème 5. *[7] On considère un ensemble fermé de $\mathbb{R}$. On peut l'écrire comme l'ensemble des zéros d'une fonction C^∞ .*

Rappel : une fonction C^∞ n'est pas en général analytique.

2 Prolongements des solutions locales d'une EDO ou d'une EDP

3 Cas des EDO

Théorème 6. [4] On considère un système différentiel $x' = f(t, x)$ avec f continue localement lipschitzienne. On a existence et unicité locale d'une solution au pb de Cauchy. On a existence d'une unique solution maximale. Enfin, si la solution maximale n'est pas définie globalement, on a le théorème de sortie de tout compact.

Proposition 3. On suppose f globalement lipschitzienne. Alors on a existence globale sur tout l'intervalle. C'est notamment le cas pour les équations linéaires. On a aussi la même chose si f est bornée, ou si la solution est bornée.

4 Prolongements de fonctions holomorphes

4.1 Prolongement ponctuel

Proposition 4. On considère une fonction holomorphe définie sur $\Omega \setminus z_0$. Si $f(z) = o(1/(z - z_0))$ en z_0 alors la fonction se prolonge de manière holomorphe sur Ω tout entier.

Remarque 1. Reste vrai pour un nombre fini de points, ou même un nombre dénombrable de points isolés.

Application 2. Une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus z_0$ et continue en z_0 est nécessairement holomorphe.

En fait on a aussi le résultat suivant:

Théorème 7. On considère une application holomorphe sur un ouvert Ω privé d'une sous-variété de dimension 1, continue sur Ω . Alors elle est holomorphe sur Ω .

4.2 Prolongement analytique

Théorème 8 (zeros isolés). Une fonction analytique sur un ouvert connexe n'a qu'un nombre fini de zeros sur tout compact (ie les zeros sont isolés), autrement dit l'ensemble des racines n'a pas de points d'accumulation. Notamment elle n'a qu'un nombre dénombrable de zeros

Corollaire 2. Prolongement analytique; deux fonctions holomorphes qui coïncident sur un ensemble admettant un point d'accumulation coïncident sur l'intersection de leurs ouverts de définition et on a que si l'une est définie sur un ensemble plus grand on peut prolonger l'autre à cet ensemble.

Attention, principe du prolongement faux si l'on suppose seulement dénombrable et pas de points d'acc.

Exemple 3. [3] Il existe deux fonction définies sur le demi-plan droit qui valent 0 sur tous les $1/n$.

Application 3. [3] On retrouve facilement la valeur de la transformée de Fourier d'une Gaussienne en posant $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2} dx$.

Application 4. [3] $f(z) := \pi^2 \cos(\pi z) / \sin^2(\pi z) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n / (z - n)^2$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

Application 5. [3][4] Il existe un unique prolongement aux fonction Γ et ζ sur resp $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$ et $\mathbb{C} \setminus 1$.

Application 6. Il n'existe pas de fonctions analytiques vérifiant $f(1/2n) = f(1/(2n+1)) = 1/n$. La seule fonction vérifiant $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^2$ est la fonction x^2 .

Application 7. [5] L'égalité $\log(1/(1-z)) = \sum z^n/n$ se prolonge sur le disque épointé de 1. On en déduit la valeur de $\sum 1_k^2$.

Application du prolongement analytique à la densité des polynômes orthogonaux.

4.3 Prolongements sur le bord du disque de convergence

[4]

Définition 1. On considère une série entière de rayon de convergence fini non nul R . Un point a du cercle est dit régulier ssi on peut prolonger la série en une fonction analytique sur un petit cercle autour de a , singulier sinon.

Proposition 5. L'ensemble des points réguliers est un ouvert, celui des points singuliers un fermé.

Le prolongement analytique permet de prouver les faits suivants.

Proposition 6. Il existe au moins un point singulier.

Lemme 1. Un point est régulier ssi dans un voisinage de a , $\sup(f^{(k)}(b/2)\rho_a^k/k! \leq C$

Proposition 7. Si les coefficients du DSE sont positifs, 1 est singulier.

Théorème 9 (séries lacunaires). Soit λ_n une série de réels telle que $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geq a > 1$. On considère une série de rayon de cv 1 $\sum a_n z^{\lambda_n}$. Tous les points du cercles sont singuliers.

Exemple 4. Suite de Morse: $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_{2n} = \varepsilon_n$, $\varepsilon_{2n+1} = -\varepsilon_n$. On considère la série $\sum \varepsilon_n z^n$, tout point du cercle est singulier.

ATTENTION: on peut quand même des fois prolonger de manière continue la série sur le cercle.

Exemple 5. Par exemple la série de rayon de convergence $\sum z^n/n^2$ peut se prolonger par continuité.

Théorème 10 (Abel non tangentiel). [4] On considère une série entière, et on considère un point du bord z_0 en lequel la série converge. Alors on a CVU de la série sur toute une portion de secteur définie par $\Delta(z_0, \rho, \varphi) = \{z | z = z_0(1 - re^{i\theta}), 0 \leq r \leq \rho, |\theta| \leq \varphi\}$, pourvu que $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ et $0 \leq \rho < 2\cos(\varphi)$, et donc on prolonge la série entière en une application continue sur ce secteur.

Application 8. [5] $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nt)/n = (\pi - t)/2$. $\sum (-1)^n/(n+1) = \ln(2)$.

4.4 Prolongements d'applications conformes[1][page 268]

On considère une application conforme définie sur un ouvert simplement connexe Ω à valeurs dans U disque unité, et on souhaite prolonger l'application par une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ à valeurs dans $\bar{U}$.

Définition 2. Un point de la frontière de U est dit simple ssi pour toute suite $\alpha_n \rightarrow \beta$ de points de U correspond une courbe Γ qui passe par les α_n et par a .

Exemple 6. On prive U du segment $[0, 1]$, les points frontières ne sont pas simples.

Théorème 11. On considère un domaine borné simplement connexe du plan et f une application conforme de Ω sur U . Alors f admet un prolongement continu en tout point frontière pour lequel $f(\beta) = 1$. De plus si β' est un autre point frontière et f est un prolongement continu de même type alors $f(\beta) \neq f(\beta')$.

Corollaire 3. Si tout point de la frontière est simple, alors toute application conforme se prolonge en une homéomorphie de $\bar{\Omega}$ sur $\bar{U}$.

5 Théorèmes généraux de prolongement et leur applications

5.1 Prolongement de fonctions uniformément continues et applications

Théorème 12. Soit deux espaces métriques E et F , avec F supposé complet. Soit X une partie dense de E . Soit f une fonction u.c sur X . Alors il existe un unique prolongement de f sur E tout entier, et ce prolongement est encore uniformément continu.

Application 9 (Ascoli). Soit K un espace métrique compact et Y un espace métrique. Les parties relativement compactes sont exactement les parties équi continues.

Corollaire 4. Soit E un evn et F un Banach. Soit X un sev dense de E . Soit f une application linéaire continue de X dans F de norme subordonnée $|||f|||$. Alors il existe un unique prolongement de f sur E , ce prolongement est encore linéaire continu de norme subordonnée $|||f|||$.

Application 10. $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ étant un sous espace vectoriel dense de $L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut prolonger la transformée de Fourier en une application linéaire continue de L^2 sur lui-même. De plus on montre que cette application est une isométrie bijective (formule de Parseval).

Application 11. Calcul fonctionnel continu: il existe un unique morphisme d'algèbre de Banach unitaires complexes entre les fonctions continues sur le spectre de A et $L(H)$ qui envoient l'identité sur le spectre de A sur A justement.

5.2 Hahn-Banach et applications

Théorème 13. Soit p une application sous-additive 1-positivement homogène, soit G un sev et g une application de G dans $\mathbb{R}$ vérifiant $g(x) \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire prolongeant g et vérifiant encore l'inégalité précédente.

Corollaire 5. Si g est une forme linéaire, il existe une forme linéaire prolongeant g et de même norme

Corollaire 6. Si on se donne un élément de E x il existe une forme linéaire f de norme $||x||$ telle que $||f(x)|| = ||x||^2$.

Application 12. $||x|| = \sup(|f(x)|) = \max(|f(x)|)$ sur les f de norme plus petite que 1.

Application 13. On note $J_b(\varphi) = \varphi(b)$. Alors $||J_b|| = ||b||$. J_b étant une injection, si elle est surjective on dit que l'espace est réflexif. On a alors que $b \mapsto J_b$ est une isométrie bijective de E vers E'' qui peuvent être identifiés.

Définition 3. On dit qu'un hyperplan sépare (au sens strict) deux ensembles au sens large si il existe un hyperplan tel que l'une des parties soit (strictement) au-dessus d'hyperplan et l'autre (strictement) au-dessous.

Théorème 14 (Hahn-Banach géométrique). On peut séparer deux convexes disjoints dont l'un est ouvert au sens large en dimension finie. On peut séparer un convexe fermé et un convexe compact au sens strict.

Application 14. [2] Tout convexe fermé d'un evn de dim finie s'écrit comme intersection de demi-espaces.

Application 15. [2] On se donne des formes linéaires φ et $\varphi_1, \dots, \varphi_r$. On suppose $\cap \text{Ker}(\varphi_i) \subset \text{Ker}(\varphi)$. Alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que $\varphi = \sum \lambda_i \varphi_i$.

5.3 Théorèmes de prolongements d'Urysohn et Tietz

Théorème 15 (Tietze-Urysohn). Soit (E, d) un espace métrique et A un fermé de E . On considère une application f continue bornée sur A . Alors on peut prolonger A sur E en $\bar{f}$ de telle manière que le sup sur E de $\bar{f}$ (resp inf) soit celui de f sur A (resp inf)

Lemme 2 (Urysohn). [1] Soit X un espace topologique localement compact séparé, V un ouvert de X et K un compact inclus dans V . Il existe une application $f \in C_c(X)$ qui prolonge la fonction 1 sur K , toujours inférieure à 1 et dont le support est inclus dans X

Application 16. Soit X un espace topologique localement compact séparé, $V_1, \dots, V_n$ des ouverts de X et K un compact inclus dans $V_1 \cup \dots \cup V_n$. Alors il existe des fonctions de X à valeurs réelles h_i comprises entre 0 et 1, avec le support de h_i qui est dans V_i , telle que $h_1(x) + \dots + h_n(x) = 1$ sur K .

Définition 4. *Un espace topologique est dit normal ssi pour tout couple d'ensembles fermés A et B disjoints, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que A soit inclus dans U et B dans V*

Théorème 16 (Urysohn). *qui établit que pour deux fermés disjoints A et B d'un espace normal X , il existe une fonction continue de X dans l'intervalle $[0, 1]$ qui vaut 1 sur A et 0 sur B .*

5.4 Théorèmes d'interpolation

L'interpolation, c'est le prolongement d'opérateurs définis sur certains espaces à d'autres espaces, ou alors le prolongement de fonctions expérimentales. C'est donc bien des prolongements de fonctions.

Théorème 17 (Lagrange). *Soient des couples de points d'un corps K , notés (x_i, y_i) avec les x_i distincts. Alors il existe un unique polynôme de degré $n-1$ sur $K[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$. l'ensemble des polynômes qui conviennent est $PK[X]$. De même si on impose des conditions en plus sur les dérivées. Enfin on a une majoration de l'erreur par interpolation de Lagrange: $\forall x \in [a, b], \exists \xi \in I/f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$. Phénomène de Runge: on peut toujours trouver une fonction pour lequel on a pas CVU.*

Théorème 18. *On considère (Ω, μ) un espace mesuré. On considère un opérateur continu T de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$ et de $L^{p'}(\Omega)$ vers $L^{q'}(\Omega)$, de norme M_0 et M_1 . Alors on peut prolonger T sur tout les espaces intermédiaires. De plus, avec des notations évidentes $M_\theta \leq M_0^\theta M_1^{1-\theta}$.*

5.5 prolongements de mesure

A Voir.

References

- [1] Rudin
- [2] Brezis
- [3] Beck
- [4] Zuily-Queffelec
- [5] Fayel exercices fonctions analytiques.
- [6] Gourdon analyse
- [7] FGN analyse 1
- [8] Rouvière