

208. Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues. Exemples.

Pierre Lissy

May 29, 2010

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Norme. Espace vectoriel normé

1.1 Définitions. Exemples

Définition 1. Une norme sur E est une application $\|\cdot\|$ de E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

le couple $(E, \|\cdot\|)$ est appelé un espace vectoriel normé.

Exemple 1. Dans $\mathbb{K}^n$, on a trois normes usuelles.

1. $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$
2. $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
3. $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$

Exemple 2. Soit K un espace topologique compact, on peut munir $\mathcal{C}(K, \mathbb{K})$ d'une structure d'evn en posant $\|f\| = \sup |f(x)|$. De même si X est un espace topologique, on peut munir $B(X, \mathbb{K})$ ou $C_b(X, \mathbb{K})$ d'une structure d'evn en prenant encore la norme infinie.

Exemple 3. Soit X un espace mesuré. Alors les espaces $(\mathbb{L}^p(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ sont des espaces vectoriels normés pour $p \geq 1$.

Proposition 1. Soit F un sev de E . Alors on peut munir F d'une structure d'espace vectoriel normé en restreignant la norme sur E à une norme sur F .

2 Distance associée à une norme

Proposition 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Alors on peut munir E d'une structure d'espace métrique en posant $d(x, y) = \|x - y\|$, appelée distance associée à la norme $\|\cdot\|$. Ceci implique notamment que E est un espace topologique séparé. De plus, cette distance est invariante par translation, on a $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$, l'adhérence de la boule ouverte de centre x et de rayon r est la boule fermée de même centre et de même rayon, inversement l'intérieur de la boule fermée de centre x et de rayon r est la boule ouverte de même centre et de même rayon. Enfin, la distance associée à la norme munit E d'une structure d'espace vectoriel topologique (on rappelle que dans un espace métrique la topologie est celle engendrée par les boules ouvertes, ie un ensemble est ouvert ssi il contient une boule ouverte)

Remarque 1. En général propriétés fausses sur un espace métrique.

Exemple 4. On munit un ensemble quelconque de la distance suivante: $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$. Alors la boule ouverte de centre x est de rayon 1 est réduit à x , donc son adhérence est réduite à x (alors que la boule fermée est l'ensemble tout entier), et inversement avec l'intérieur.

Remarque 2. Si on se donne sur E une distance invariante par translation telle que $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$, on obtient une norme en posant $\|x\| = d(x, 0)$.

Définition 2. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel muni d'une topologie. E est dit normable ssi on peut trouver une norme telle que $(E, \|\cdot\|)$ définisse la même topologie que $(E, \mathcal{T})$.

Un espace vectoriel normable est un evt mais la réciproque est fausse.

Exemple 5. [8] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K_i une suite exhaustive de compacts. On munit $C^k(\Omega)$ de la distance suivante: $d(f, g) := \sum_0^\infty \frac{p_i(f - g)}{1 + p_i(f - g)}$ où p_i est la norme habituelle sur $C^k(K_i)$. Cet espace n'est pas normable mais c'est trivialement un evt.

Proposition 3. Soit E un evn et F un evn. Alors les ouverts de F pour la norme induite sont les traces des ouverts de E . Idem avec fermés, voisinages.

2.1 Comparaison des normes

Définition 3. Une topologie T_1 est dite plus fine qu'une topologie T_2 ssi T_1 a plus d'ouverts que T_2 , ie $T_2 \subset T_1$.

Définition 4. On munit un ev E de deux normes N_1 et N_2 . On dit que N_1 est plus fine que N_2 ssi $\exists k > 0 | N_2 \leq kN_1$. Ceci revient à dire que l'identité de (E, N_1) vers (E, N_2) est continue. Deux normes sont dites équivalentes ssi N_1 est plus fine que N_2 et N_2 est plus fine que N_1 . C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E . Ceci revient à dire que l'identité est un homéomorphisme.

Proposition 4. N_1 est plus fine que N_2 ssi la topologie associée à N_1 est plus fine que celle associée à N_2 . Deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie.

Exemple 6. Sur $\mathbb{K}^n$, les trois normes présentées sont équivalentes : $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \leq n\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{n}\|\cdot\|_\infty$.

Exemple 7. [7][exos] On considère l'ev des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ valant 0 en 0. Alors $\sup|x + x'|$ et $\sup|x| + \sup|x'|$ sont toutes les deux des normes et sont équivalentes.

Toutes les normes ne sont pas en général équivalentes.

Exemple 8. On munit l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ sur $\mathbb{R}$ de la norme infinie et de la norme 1. On a $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$, mais si l'on considère f_n une fonction affine par morceaux en triangle qui vaut n en $1/2$, 0 sur $[0, 0.5 - 1/n]$ et $[0.5 + 1/n, 1]$, alors la norme infinie des f_n est de plus en plus grande alors que la norme 1 est constante, ce qui prouve que $\|\cdot\|_1$ n'est pas plus fine que $\|\cdot\|_\infty$.

Si l'on se donne deux normes, on a pas nécessairement que l'une est plus fine que l'autre.

Exemple 9. On munit l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ qui sont un grand O de $1/x^2$ en ∞ de la norme infinie et de la norme 1. En reprenant l'exemple précédent on voit que $\|\cdot\|_1$ n'est pas plus fine que $\|\cdot\|_\infty$. Inversement on a aussi que $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas plus fine que $\|\cdot\|_1$. On pose f_n une fonction triangulaire sur $[0, 2n]$ nulle autre part, valant $1/n$ en n . Sa norme infinie tend vers 0 alors que sa norme 1 est constante.

2.2 Norme produit, norme quotient

Définition-proposition 1. on se donne n evn $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$. Alors on peut munir l'espace vectoriel produit d'une structure d'evn en utilisant n'importe laquelle des normes équivalentes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$. Muni d'une de ses normes, on appellera E l'espace vectoriel normé produit des $E_1, \dots, E_n$.

Définition-proposition 2. [1] Soit E un evn et F un sev fermé de E . On s'intéresse à l'espace quotient E/F . Alors on peut munir E/F d'une structure d'evn en posant $\|Cl(x)\|_{E/F} = \inf\|\text{representants}\|$.

Remarque 3. Si F n'est pas fermé, alors $\|\cdot\|_{E/F}$ n'est JAMAIS une norme: soit $x \in \bar{F} \setminus F$, alors on a $\|Cl(x)\|_{E/F} = 0$ alors que $Cl(x) \neq 0$.

2.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème 1. Sur un ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Remarque 4. Réciproque vraie en comparant $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ dans une base.

Remarque 5. Ce résultat permet de choisir la norme qui nous semble la plus adéquate quand on traite de questions sur les evn.

Application 1. Dans un espace de matrices par exemple, on montre assez facilement que toutes les normes sont en fait des normes d'algèbres de Banach.

Application 2. Via le théorème de Householder, on démontre la formule du rayon spectral, notamment on démontre qu'on a la convergence des itérées vers 0 ssi le rayon spectral est strictement négative.

Remarque 6. Il est souvent intéressant de trouver les meilleures constantes de l'équivalence.

Exemple 10. [9] On se place sur K^n et on compare les normes $\|\cdot\|_p$ avec $p \geq 1$. On a $\|\cdot\|_q \leq C_{p,q} \|\cdot\|_p$ avec $C_{p,q} = \max(1, n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}})$

Théorème 2 (Riesz). Un espace vectoriel est de dimension finie ssi la boule fermée unité (ou n'importe quel fermé borné) est compact.

Application 3. [7] Tout sous-espace vectoriel fermé de $C([0,1], \mathbb{R})$ constitué de fonctions dérivables est de dimension finie.

Application 4. Pareil avec les fonctions holderiennes.

Application 5. Non normabilité de certains espaces.

2.4 Cas des espaces préhilbertiens

[4]

Définition 5. Soit E un $\mathbb{R}$ -ev. On appelle produit scalaire sur E une forme bilinéaire symétrique définie positive. Soit E un $\mathbb{C}$ -ev. On appelle produit scalaire (ou produit hermitien) sur E une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Définition-proposition 3. Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E . On appelle norme associée au produit scalaire $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$. On vérifie que c'est une norme sur E .

Définition 6. $(E, \|\cdot\|)$ est un espace préhilbertien ssi $\|\cdot\|$ est issue d'un produit scalaire.

Proposition 5. Dans un espace préhilbertien, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y)$, $4\operatorname{Re}(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, $4\operatorname{Im}(x|y) = \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2$.

Théorème 3. Toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est une norme préhilbertienne.

Théorème 4 (C-S). $(x|y) \leq \|x\| \cdot \|y\|$, avec égalité ssi (x, y) est liée.

Proposition 6. $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x$ et y sont positivement colinéaires.

Corollaire 1. Le produit scalaire est continu pour la norme produit. Pour tout y , l'application $(\cdot|y)$ ou $(y|\cdot)$ est continue.

3 Applications linéaires continues

3.1 Caractérisations

Définition 7. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .

Théorème 5. Soit f une application linéaire d'un evn E dans un evn F . Les affirmations suivantes sont équivalentes.

1. f est continue sur E
2. f est uniformément continue sur E
3. f est continue en 0
4. f est lipschitzienne
5. f est bornée sur la sphère unité
6. f est bornée sur la boule fermée unité
7. Il existe $M > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq M\|x\|$

De plus, toute application additive bornée sur la sphère unité est nécessairement linéaire continue [7][Exos]

Exemple 11. [7][Exos] Dans $E = \mathbb{C}([0, 1], K)$ muni de la norme 1, soit $\varphi \in E$, alors la forme linéaire est continue

Exemple 12.

Exemple 13.

Remarque 7. En règle général, il existe des applications linéaires non continues

Exemple 14. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme 1 (somme des valeurs absolues des coefficients), $F = \mathbb{R}$. On considère $f : P \mapsto P(2)$. Posons $P_n(x) := 1 + X + X^2 + \dots + X^n$. On a $\|P_n\|_1 = n$ mais $|f(P_n)| \leq 2^n$ donc cette application linéaire n'est pas continue.

Corollaire 2. Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

Remarque 8. Réciproque vraie: l'application linéaire qui a une base associée sa norme 1 n'est continue pour aucune norme.

Corollaire 3. On peut munir $\mathbb{L}(E, F)$ d'une structure d'evn en posant $\|f\| = \sup \|f(x)\| / \|x\| = \sup \|f\|$, appelée norme subordonnée aux normes sur E et F . On a alors $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$.

En général cette borne sup n'est pas atteinte.

Exemple 15. [9][Exo 8] fonctions continues complexes sur $[-1; 1]$ munies de la norme infinie, et $f(x) = \int_0^1 x - \int_{-1}^0 1^1 x$.

Remarque 9. On a aussi un critère de continuité intéressant pour les applications multilinéaires: elle sont continues (pour la topologie produit) ssi $\|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq k \|x_1\| \dots \|x_n\|$.

3.2 Formes linéaires continues

Théorème 6. Une forme linéaire est continue ssi son noyau est fermé.

Théorème 7. [9][Ex 8] Soit φ une forme linéaire continue. Alors Si $a \notin \text{Ker}(\varphi)$, on a $\|\varphi\| = \frac{|f(a)|}{d(a, \text{Ker } f)}$.

Distance pas forcément atteinte, cf exemple précédent.

3.3 L'algèbre normée $\mathcal{L}(E)$

Lemme 1. Soit E, F et G trois evn, et f une alc de E dans F , g de F dans G . Alors on a $\|gf\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$.

Corollaire 4. $\mathbb{L}(E)$ peut être munie d'une structure d'algèbre normée, ie $\|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ et $\|Id\| = 1$.

3.4 Prolongement d'applications linéaires continues

Théorème 8. [7] Soit X un sev de E , et f une application de X dans un evn F .

Théorème 9. Soit p une application sous-additive 1-positivement homogène, soit G un sev et g une application de G dans $\mathbb{R}$ vérifiant $g(x) \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire prolongeant g et vérifiant encore l'inégalité précédente.

Corollaire 5. Si g est une forme linéaire, il existe une forme linéaire prolongeant g et de même norme

Corollaire 6. Si on se donne un élément de E x il existe une forme linéaire f de norme $\|x\|$ telle que $\|f(x)\| = \|x\|^2$.

Application 6. $\|x\| = \sup(|f(x)|) = \max(|f(x)|)$ sur les f de norme plus petite que 1.

Application 7. On note $J_b(\varphi) = \varphi(b)$. Alors $\|J_b\| = \|b\|$. J_b étant une injection, si elle est surjective on dit que l'espace est réflexif. On a alors que $b \mapsto J_b$ est une isométrie bijective de E vers E'' qui peuvent être identifiés.

3.5 monomorphismes

[7]

Définition 8. Un monomorphisme est une application linéaire continue injective de E dans F .

Proposition 7. f est un monomorphisme ssi $k\|x\| \leq \|f(x)\| \leq K\|x\|$.

Proposition 8. l'ensemble des monomorphismes est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.

Citer aussi pour la transformée de Fourier le théorème issu du théorème de prolongement des applications UC.

4 Espaces de Banach

4.1 Définition

Définition 9. Un espace vectoriel normé est dit de Banach ssi il est complet pour la distance associée à la norme.

Théorème 10. E est un Banach ssi toute série absolument convergente est convergente.

Exemple 16. $C(K, \mathbb{K})$

4.2 Théorème de Banach-Steinhaus et conséquences

Théorème 11. Soit T_i une famille d'opérateurs linéaires continues d'un Banach E dans un evn F . Alors soit $\sup \|T_i\| < \infty$, , soit il existe un $G - \delta$ dense tel que pour tout x dans X , $\sup \|T_i(x)\| = +\infty$.

Application 8. Toute application bilinéaire de $E \times F$ vers G avec E, F, G Banach continue séparément par rapport à chacune des variables est globalement continue.

Application 9. Il existe un $G - \delta$ dense de fonctions telles que la série de Fourier en 0 diverge.

Application 10. B bornée ssi B est faiblement bornée, ie. pour toute forme linéaire continue $f(B)$ est bornée. On retrouve le résultat vrai de dim finie qu'une partie est bornée si et seulement si elle est bornée sur chacun des axes d'un système de coordonnées.

Corollaire 7 (Théorème de l'application ouverte). Toute application linéaire surjective d'un Banach vers un Banach est ouverte.

Application 11. Toute application linéaire continue bijective est un isomorphisme.

Application 12. Si deux normes rendent E complet et que l'une est plus fine que l'autre alors elles sont équivalentes.

Corollaire 8 (Théorème du graphe fermé). Si le graphe d'une al d'un Banach dans un Banach est fermé alors cette al est continue.

Application 13. Tout opérateur positif d'un Hilbert est continu.

Application 14. Tout opérateur d'un Hilbert admettant un adjoint (pas forcément continu) est continu.

4.3 $\mathcal{L}(E)$ avec E complet

Proposition 9. Si $\|x\| < \infty$, alors $\sum x^n$ CVA donc CV. Dans ce cas, $Id - x$ est inversible et $(1 - x)^{-1} = \sum_0^\infty x^n$. De plus, on a $\|(1 - x)^{-1} - 1\| \leq 1/(1 - \|x\|)$.

Corollaire 9. L'ensemble des isomorphismes de E est un ouvert non vide. Plus précisément, si u est inversible tous les éléments de $B(u, \|u\|^{-1})$ sont inversibles. enfin, l'application qui à u associe son inverse est un homéomorphisme involutif de A dans A .

On a en fait un résultat plus fort.

Théorème 12. [7] perturbations des isomorphismes Soit ω un ouvert de E Banach et F un Banach. Soit g une application de A dans F et f un isomorphisme de E dans F . Si g est lipschitzienne de rapport $< \|f^{-1}\|^{-1}$, alors $f + g$ est injective, lipschitzienne, son inverse aussi, et son image est un ouvert de F .

Corollaire 10. L'ensemble des isomorphismes de E dans F est un ouvert (éventuellement vide) de $\mathcal{L}(E, F)$.

Application 15. Le spectre d'un opérateur d'un Hilbert est un compact de $\mathbb{C}$.

Remarque 10. Hypothèse de complétude essentielle

Exemple 17. On prends les polynômes immergés dans $C([0, 1], \mathbb{R})$. On considère l'application $g : P \mapsto P(X^2)$. On montre que g est de norme 1, donc kg est lipschitzienne de rapport k . Mais une perturbation de l'identité ne donne que des polynômes de degré pair et donc c'est pas un ouvert.

Définition-proposition 4. *Fonction exponentielle.* On pose $\exp(x) := \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$. Cette série est définie sur $\mathcal{L}(E)$, elle converge normalement sur toute boule de E , on $\|e^x\| \leq e^{\|x\|}$. Si A et B commutent on a $e^{A+B} = e^A e^B$. Donc e^A est inversible d'inverse e^{-A} . De plus f est de classe C^∞ et ses dérivées sont normalement convergentes sur toute boule de A . De plus on a pour tout t , $\exp(tA)_t = \exp(tA)$, et plus généralement si on a f et f' fonctions de I dans A qui commutent, on a $e_t^{f(t)} = f'(t)e(f(t))$. Ceci sert par exemple à trouver la solution de l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^n$ $y' = Ay$ avec $y(0) = y_0$: c'est $\exp(tA)y_0$.

Parler de topologie faible et *-faible (la plus fine qui rend continue les applications linéaires continues). Applications: minimisation de fonctions convexes sci, Banach-Alaoglu-Bourbaki (citer qqes applications), etc.. Spécificité du cas hilbert: représentation de Riesz. Montrer sur des exemples que cela peut servir d'avoir en plus les duaux de manière explicites?

References

- [1] Schwartz topologie
- [2] Genet +++
- [3] Gourdon analyse
- [4] Gourdon algèbre
- [5] Brezis
- [6] Hauchecorne
- [7] Choquet
- [8] Zuily-queffelec
- [9] Rouviere