

213: espaces de Hilbert, bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Pierre Lissy

May 29, 2010

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1. *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien réel ou complexe complet pour la norme associée au produit scalaire.*

Exemple 1. $L^2(E, A, \mu)$ avec (E, A, μ) un espace mesuré. $H^s(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (avec $s \geq 0$). $H_0^1(\Omega)$ avec Ω un ouvert borné. Par contre C_0^∞ muni de la norme 2 n'est pas un espace de Hilbert. Les espaces de dimension finie muni d'une norme 2 associée à une base.

Définition 2. *Base hilbertienne: famille orthonormée e_λ telle que $\overline{\text{Vect}(e_\lambda)} = H$.*

Théorème 1. *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne (théorie ZFC)*

Il ne faut pas confondre les bases hilbertiennes et les bases algébriques. Notamment rappelons le fait suivant qui découle de Baire:

Théorème 2. *Aucun espace de Banach de dimension infinie n'admet de base algébrique dénombrable, donc à fortiori aucun Hilbert*

Théorème 3. *H admet une base hilbertienne dénombrable ssi H est séparable.*

Exemple 2. *Tous les espaces ci-dessus étant séparables, ils admettent une base hilbertienne. Notamment une base hilbertienne de $L^2(0, 2\pi)$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques. Une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ est $((i - x)/(i + x))^n / \sqrt{\pi(1 + x^2)}$.*

Propriété universelle de l^2 : tout espace de Hilbert est isomorphe (isométrique) à L^2 .

1.2 Projection sur un convexe fermé et applications

Lemme 1 (Egalité du parallélogramme). $\|(x + y)/2\|^2 + \|(x - y)/2\|^2 = 1/2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Théorème 4. *On considère un convexe fermé de H , noté K . Alors si l'on se donne $u \in H$, il existe un unique élément $P_K(u) \in K$ qui minimise la distance de K à u . Il est appelé projeté sur K de u . De plus, ce point est l'unique vérifiant $(u - P_K(u), v - P_K(u)) \leq 0$ pour tout $v \in K$. Enfin, l'application P_K est 1-lipschitzienne identiquement nulle sur K .*

Les conséquences de ce théorème sont innombrables.

Corollaire 1. *On considère un sous-espace vectoriel fermé de H . Alors $P_F(u)$ vérifie $(u - P_F(u), v - P_F(u)) = 0$ pour tout $v \in F$. De plus, F est en somme directe orthogonale avec son orthogonale.*

Notamment, d'un point de vue probabiliste voir l'indépendance comme de l'orthogonalité (cf Malliavin)

Corollaire 2. *Inégalité de Bessel: on a $\|P_F(u)\| \leq \|u\|$, notamment si u est de dimension finie de BON $e_1, \dots, e_n$, on a $\sum ((e_i, u))^2 \leq \|u\|^2$.*

Application 1 (Stampachia). On considère une forme bilinéaire continue coercive sur $H \times H$. Alors si l'on se donne une forme linéaire φ , il existe un unique élément de K noté u tel que $a(u, v - u) \geq \varphi(v - u)$ sur K . Si l'on applique ceci H tout entier on obtient Lax-Milgram.

Mettre des applications à des EDP.

Application 2. *Espérance conditionnelle.* On considère une variable aléatoire intégrable sur un espace probabilisé Ω, F, μ . On considère une sous-algèbre G de F . Alors il existe une unique (ps) variable aléatoire Y telle que

1. Y est G -mesurable.
2. Y est intégrable
3. pour tout sous-ensemble g de G (ou de manière équivalente pour tout g appartenant à un π -système qui génère G , on a $\int_g Y dP = \int_g X dP$.

Y est appelé espérance conditionnelle de X selon G et est noté $E(X|G)$. Enfin, dans le cas où X admet un élément d'ordre 2, $E(X|G)$ s'interprète comme étant la projection orthogonale de X sur le sous-espace fermé des fonctions de carré intégrable sur $L^2(\Omega, G, \mu)$.

Application 3. Tout fermé convexe de F admet un élément de norme minimale, et cet élément est unique.

Utilisation dans les problèmes d'approximation (existence et unicité de la meilleure approximation au sens des moindres carrés, ie approximation L^2 d'une fonction L^2 par un polynôme, ou alors de même pour les fonctions continues, bref faire des moindres carrés)

Définition 3. Soit E un espace euclidien (ou hermitien) muni du ps $(\cdot|\cdot)$. Matrice de Gram $G(e_1, \dots, e_n) = (e_i|e_j)$. C'est une matrice symétrique (ou hermitienne). on note g le déterminant de G .

Proposition 1. Dans le cas réel ou complexe, une matrice de Gram est toujours positive (et déf pos ssi les vecteurs sont libres)

Théorème 5. Distance d'un point à un sev de dim finie (dans un espace vectoriel réel): $d(x, \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)) = \sqrt{(g(v_1, \dots, v_p, x)/g(v_1, \dots, v_p))}$.

Application 4. Théorème de Müntz: x^{α_n} dense dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ ssi la série des $1/\alpha_n$ diverge.

Grâce au théorème de projection, on peut démontrer dans le cas de Hilbert sans l'axiome du choix

Application 5. On peut séparer de manière stricte un convexe compact et un convexe fermé. On peut séparer de manière large un convexe et un convexe ouvert.

On en déduit notamment:

Application 6. Dans un espace de Hilbert, tout convexe est intersection de demi-espaces fermés, et inversement

Application 7. Caractérisation dans un Hilbert de l'enveloppe convexe fermée et application notamment à l'étude de l'enveloppe convexe fermée de O_n .

1.3 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 6. Toute forme linéaire est représentée de manière unique par un vecteur. $\varphi(\cdot) = \langle u, \cdot \rangle$. La norme de l'application est celle de u . C'est de plus l'unique minimum de la fonction $x \mapsto 1/2\|x\|^2 - \text{Re}(\varphi(x))$.

Corollaire 3. H est isomorphe à son dual H' et est donc réflexif.

Théorème 7. *Toute forme antilinéaire est représentée de manière unique par un vecteur. $l(.) = \langle ., u \rangle$. La norme de l'application est celle de u . C'est de plus l'unique minimum de la fonction $x \mapsto 1/2 \|x\|^2 - \operatorname{Re}(\varphi(x))$.*

Application 8. *Gradient.*

Application 9. *Un sev est dense ssi son orthogonal est réduit à 0.*

Application 10. *OA: densité des polynômes orthogonaux sous certaines conditions.*

Application 11. *Définition de l'adjoint d'un opérateur dans le cadre Hilbertien. Définition aussi de l'adjoint d'un opérateur non borné.*

LAX-MILGRAM comme conséquence de Riesz.

Penser à la topologie faible dans les Hilbert, notamment du coup grâce à Riesz sa simplifie tout. Notamment la condition pour que sa converge juste à partir de la norme. On en déduit comme applications : EDP perturbée, plus truc de Fabre (on considère un espace de Hilbert V et une tour d'év de dim finie: $\dim(V_n) = p_n$, inclusion et union dense. Alors On a par LM unicité à chaque fois d'un u_n tel que pour tout v , $a(u_n, v) = l(v)$. On a la bornitude des u_n donc on extrait une suite qui cv faiblement, on montre qu'elle converge nécessairement du coup vers u solution du pb de Lax-Milgram global et on en déduit par un théorème assez connu (suite d'un compact qui a une unique valeur d'adhérence). Enfin, on montre par la coercivité de l'application que la convergence est en fait forte.)

2 Espaces de Hilbert séparables

2.1 Parceval

Théorème 8. *Posons $E_n = \operatorname{vect}(e_n)$ la suites des espaces vectoriels de dimension finie définis par la base e_i . Alors si $u_n = P_{E_n}(u)$, on a $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k$ et $|u|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2$. On a donc que $u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.*

Les conséquences sont importantes.

Application 12. *On considère une application de classe C^1 et 2π périodique d'intégrale nulle. Alors $\|f\|_2 \leq \|f'\|_2$ avec égalité ssi $f \in \operatorname{Vect}(e^{it}, e^{-it})$.*

Application 13. $4 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_n^2 \sin^2(nh) = 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2$.

Application 14. *Calcul de $\sum 1/k^2$ et plus généralement de $\sum 1/k^{2n}$.*

3 Opérateurs compacts autoadjoints sur un Hilbert complexe, applications

On rappelle les notations $R(T)$ et $N(T)$ pour l'image et le noyau d'un opérateur $T: L(H) \rightarrow L(H)$.

3.1 Opérateurs compacts

Définition 4. *Un opérateur est dit compact ssi l'image de la boule unité est relativement compacte.*

Proposition 2. *L'ensemble des opérateurs compacts est un sous-espace vectoriel fermé de $L(H)$*

Théorème 9. *Tout opérateurs compact est limite d'opérateurs de rang fini.*

Proposition 3. *La composition dans n'impose quel sens d'un opérateur borné et d'un opérateur compact donne un opérateur compact.*

3.2 Adjoint

Définition-proposition 1. L'application $v \mapsto (u, Tv)$ est une forme antilinéaire continue donc d'après le théorème de Riesz il existe $T^*(u)$ tq $(u, Tv) = (T^*u, v)$. T^* est un opérateur linéaire continu appelé adjoint.

Définition 5. Un opérateur est dit auto-adjoint ssi il est égal à son adjoint.

Théorème 10 (Schauder). T compact ssi T^* compact.

Théorème 11 (alternative de Fredholm). . On considère un opérateur compact. On a

1. $N(Id - T)$ de dim finie
2. $R(Id - T)$ est fermé, et $R(Id - T) = N(I - T^*)^\perp$.
3. $Id - T$ injectif ssi surjectif
4. $\dim N(Id - T) = \dim N(Id - T^*)$

3.3 Spectre d'un opérateur compact

Définition 6. Le spectre est l'ensemble des éléments tq $(T - \lambda I)$ est bijectif.

Proposition 4. Le spectre d'un opérateur quelconque est compact, inclus dans $[-|||T|||, |||T|||]$.

Théorème 12. On considère un espace de Hilbert de dimension infinie, et T un opérateur compact. Alors 0 est dans le spectre, c'est le seul élément qui ne soit pas éventuellement une valeur propre, et on est dans l'une des trois situations suivantes:

1. $\sigma(T) = 0$
2. $\sigma(T)$ est fini
3. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

3.4 Théorème spectral

Lemme 2. Un opérateur auto-adjoint a nécessairement un spectre réel.

Lemme 3. On considère un opérateur autoadjoint. On pose $m = \inf(Tu, u)$ sur la sphère, et $M = \sup(Tu, u)$ sur la sphère. Alors ces deux éléments sont dans le spectre et en plus le spectre est inclus dans $[m, M]$.

Corollaire 4. Un opérateur auto-adjoint dont le spectre est réduit à 0 est nul.

Théorème 13. Tout opérateur autoadjoint compact sur un espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres.

3.5 Applications

Application 15. Opérateur de transfert: c'est l'opérateur défini sur $L^1(R)$ par $u \mapsto \int K_t(x, y)u(y)dy$ avec K_t le noyau suivant: $K_t(x, y) := e^{-(V(x)+V(y))/2-t|x-y|^2}$ avec V une application de classe C^∞ telle que $\int_R e^{-V} < \infty$. On sait grâce au lemme de Schur que c'est bien un opérateur borné, et grâce au théorème d'Ascoli, puisque K est continu, que cette application est compacte. On a donc une suite de valeurs propres qui tend vers 0. De plus on prouve que l'opérateur est positif et injectif, donc ses valeurs propres sont positives. Un opérateur positif étant toujours auto-adjoint, il se diagonalise dans une base de vecteurs propres non nuls. Par contre, 0 est dans le spectre sans être une valeur propre! Enfin, on montre que la plus grande valeur propre est de multiplicité 1.

Application 16. *Réalisation de Dirichlet du Laplacien.* On considère un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et l'espace de Hilbert $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. On considère l'opérateur suivant $Id - \Delta$. On remarque qu'il est auto-adjoint positif et surtout INVERSIBLE. On peut alors montrer que son inverse est compact (grâce au théorème de Rellich). Enfin, sa norme d'opérateur est inférieure ou égale à 1. On a donc une base hilbertienne de vecteurs propres tendant vers 0: $(-\delta + Id)^{-1}u_n = \lambda_n u_n$, ce qui donne $-\Delta u_n = (1 - 1/\lambda_n)u_n$. On a donc diagonalisé le laplacien. On peut donc maintenant résoudre l'équation de la chaleur sur notre domaine (modulo la connaissance des vecteurs propres et valeurs propres)

Application 17. *Storm-Liouville*

Utilisation des vecteurs propres du laplacien pour plein de problèmes d'EDP.

References

[1]