

214: Inversion locale; fonctions implicites. Exemples et applications

Pierre Lissy

March 3, 2010

On considère trois espaces de Banach E, F, G et U, V, W des ouverts de ces espaces.

1 Théorème d'inversion locale

1.1 Difféomorphismes

Définition 1. Une application f de U sur un ouvert V est appelé un C^k difféomorphisme ssi elle est de classe C^k , bijective et la réciproque est aussi C^k .

Remarque 1. Ceci implique évidemment en dimension finie que E et F sont de même dimension.

Exemple 1. Le passage en coordonnées polaire $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est un C^∞ difféomorphisme de $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ sur $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite des réels négatifs.

Exemple 2. La boule unité en dimension finie est C^1 difféomorphe à l'espace tout entier par $x \mapsto th(x)x/||x||$, $f(0) = 0$.

Il existe des homéo C^1 qui ne sont pas des difféo.

Exemple 3. $f(x) = x^3$.

L'application principale des difféo est le théorème de changement de variables.

Théorème 1. On munit un ouvert $\mathbb{R}^n$ de la mesure de Lebesgue. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un autre ouvert et φ un difféo entre les deux. Si f est intégrable sur U , alors $f \circ \varphi$ est intégrable sur V et $\int_U f d\lambda = \int_V f \circ \varphi d\lambda$.

1.2 Inversion locale

Lemme 1 (Point fixe de Picard). Soit (X, d) un espace métrique complet et f une fonction de X dans X k -contractante avec $k < 1$. Alors f possède un unique point fixe.

Théorème 2. Soit U un ouvert E , a un point de U , et f différentiable de classe C^1 . On suppose que $df(a)$ est un isomorphisme. Alors f est localement un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de a vers un voisinage de $f(a)$.

Remarque 2. Vrai en fait pour un C^k difféo.

Faux si il manque des hypothèses.

Exemple 4. $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est un difféomorphisme local en tout point privé de l'origine, mais n'est pas un difféomorphisme global (pas injectif)

Application 1. [1] Résolution de l'équation $(y-z)\partial_x f + (z-x)\partial_y f + (x-y)\partial_z f = 0$ par changement de variable. On trouve les fonctions $\varphi(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$ où φ est une fonction de classe C^1 sur $u^2 < 3v$.

Application 2. [1]Système $f(x, y) = u, g(x, y)v$. On suppose $d\varphi$ de rang 2 en un point (a, b) de U . Alors localement on a existence et unicité de solutions. Si la différentielle est de rang 1 pour tout (x, y) , on disjoncte les cas: soit une infinité de solution, soit pas de solutions.

Application 3. [1]On peut redresser les champs de vecteurs. Soit v de U dans $\mathbb{R}^n$ et on considère le flot $\varphi_t(x)$ d'une EDO $dy/dt = v(y)$ et $y(0) = x$. avec v de classe C^1 . Alors on sait que le flot est une application de classe C^1 . On peut redresser le flot: on peut changer localement de coordonnées pour transformer le système différentiel en $dY/dt = V$, et $Y(0) = X$, avec $V = (1, 0, \dots, 0)$.

Application 4. [1]Si une matrice M est inversible, la classe de congruence contient au moins un petite boule centrée en M . (donc classe ouverte?)

Application 5. [3]Localement autour de l'identité, on a existence d'une racine n -ième d'une matrice

Application 6. [3]Cf Mnémé-Testard, il n'existe pas de groupes arbitrairement petits dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Application 7. [3][1] Application de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. on suppose $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ non dégénérée de signature $(p, n - p)$. Alors il existe un difféo locale valant 0 en 0 tel que $f(x) = f(0) + \varphi_1^2(x) + \dots + \varphi_p(x)^2 - \dots$. Application: $D^2f(0, 0)$ de signature $(+, -)$. La courbe $f(x, y) = f(0, 0)$ admet un point double à l'origine et le couple des tangentes est d'équation .

1.3 Inversion globale

Théorème 3. On suppose f injective sur un ouvert U et telle que la différentielle est un isomorphisme en tout point. Alors l'image de f est un ouvert et f est un C^1 difféo. De même avec C^k .

Exemple 5. [1]L'application $f(x, y) = (x+1, xy) = (s, p)$ est un difféomorphisme de $U = \{x > y\}$ et $V = \{s^2 > 4p\}$. De plus, U est un ouvert connexe maximal tel que f soit un difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Application 8. [2][Hadamard-Levy] f de classe C^1 (resp C^k) de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même . F est un difféo ssi f est propre et la jacobienne est inversible en tout point

Application 9. [1]Une application C^k k -dilatante est un difféo sur $\mathbb{R}^n$.

Application 10. Une application holomorphe injective est biholomorphe.

Exemple 6. L'exponentielle complexe est un difféo de la bande sur $\mathbb{C}$ privé des réels négatifs.

1.4 Immersion, submersion, rang constant

Théorème 4 (Submersion). [1]Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1 . On suppose qu'en un point a de U la différentielle $Df(a)$ est une application linéaire surjective. Alors on peut localement compléter les fonctions $f_1, \dots, f_p$ en un difféomorphisme sur un voisinage V . Dans ce nouveau système f est la projection, f est une application ouverte, et il n'existe aucune application φ non identiquement nulle telle que $\varphi(f_1(), \dots, f_p(x)) = 0$ sur V . De plus f admet un inverse à droite C^1 .

Théorème 5 (Immersion). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1 . On suppose la différentielle injective en un point a . On peut quitte à permuter les coordonnées transformer après un changement de coordonnées f en l'injection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$. f a un inverse à gauche C^1 .

Théorème 6 (rang constant). On suppose le rang constant égal à r sur l'ouvert. Alors on peut changer de coordonnées au départ et à l'arrivée pour obtenir la projection sur les r premières coordonnées.

2 Théorème des fonctions implicites

2.1 Le théorème

Théorème 7. f de $U \times V$ vers G de classe C^1 (ou C^k). On suppose $f(a,b) = 0$. On suppose que la différentielle partielle par rapport à la deuxième variable est un isomorphisme. Alors l'équation $f(x,y) = 0$ se résout localement sous la forme: $x \in U', y \in V', f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x \in U', y = \varphi(x))$ avec φ de classe C^k .

Exemple 7. $[1]x^2 + y^2 - 1 = 0$ s'inverse localement sauf si $y = 0$. On a deux fonctions implicites.

Remarque 3. On peut calculer facilement les dérivées de la fonction implicite en réinjectant dans l'équation.

Exemple 8. Paramétrage précédent $\varphi'(x) = -x/y = -x\varphi(x)$.

Application 11. $[3]$ Les racines simples d'un polynôme dépendent localement de manière C^∞ des coefficients. Les polynômes à racines simples forment un ouvert.

Exemple 9. $[1]$ Point fixe et fonctions implicites: le point fixe paramétré d'une application contractante de classe C^1 dépend de manière C^1 du paramètre.

Exemple 10. $[4] \sin y + xy^4 + x^2 = 0$: définition implicite sur deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et C^∞ difféo.

Exemple 11. $[1]$ zéro approché de $x^7 + 0.99x - 2.03 = 0$.

2.2 Applications à l'étude de courbes définies implicitement

$[5]$

Définition 2. On considère une application f qui définit une courbe implicite dans le plan. Un point est dit ordinaire ssi $df(M)$ est non nul, singulier sinon.

Théorème 8. On considère un point ordinaire M_0 de la courbe plane Γ d'équation $f = 0$. On peut alors paramétrer l'arc localement de manière cartésienne, et la tangente à cet arc est $df(M_0)(M - M_0)$.

Théorème 9. Un point ordinaire est un point d'inflexion ssi il vérifie $H(x,y) = 0$ avec H la fonction suivante:

$$H(x,y) = f_x^2 F_{xy} - f_x f_y (f_{x^2} + f_{y^2}) + f_y^2 f_{xy}$$

Théorème 10. On considère la forme quadratique qu'est la différentielle seconde, en un point singulier $Q(x,y) = d^2 f(M_0)(x,y)^2 = rx^2 + 2sxy + ty^2$. On a différents cas, donnés par le lemme de Morse:

1. φ déf pos, $rs - t^2 > 0$ (res def neg): f admet un minimum (resp max) strict en ce point
2. φ pas définie, mais non dégénéré $rs - t^2 < 0$: sur un voisinage c'est le seul point singulier, et la courbe est localement la réunion de deux arcs simples réguliers, et les tangentes sont d'équation $Q(x - x_0, y - y_0) = 0$.

Exemple 12. $F(x,y) = x^5 - y^4 + x^2(x+y)$ Etude du Lelong Ferrand Arnaudès

Exemple 13. $[1]$ Folium de Descartes: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$: admet un point double à l'origine. En appliquant le théorème des fonctions implicites, on peut paramétrer localement le folium, puis l'étudier en détail, notamment tangentes, branches infinies...

3 Sous-variétés

3.1 Définition, premiers exemples

Définition 3. Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $a \in V$. et d un entier naturel. On dit que V est lisse en a , de dimension d , s'il existe un difféomorphisme F de classe C^1 d'un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, qui transforme V en un sous-espace vectoriel de dimension d , ie. $F(U \cap V) = V' \cap F(U)$ avec $V' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. On dit que V est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ si V est lisse de dimension d en chacun de ses points.

Remarque 4. On pourrait étendre aux sous-variétés de classe C^k .

Exemple 14. Le cône du second degré privé de 0 est une variété lisse.

Théorème 11. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \dots, f_p$ de U dans $\mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 . Soit V l'ensemble des points x tels que $x \in U$ et $f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_p(x_1, \dots, x_n) = 0$. On suppose les différentielles indépendantes. Alors V est une sous-variété de dimension $n-p$ de $\mathbb{R}^n$.

Des exemples de non variété (pas lisse en 0)

Exemple 15. 1. $x^2 - y^2 = 0$

2. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

3.2 Théorème fondamental

Théorème 12. 1. V lisse en a , de dimension d

2. Pour tout a , il existe un voisinage de a et une submersion g à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$;

3. Pour tout a , il existe un ouvert contenant A et autre ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a_1, \dots, a_p)$ et une app C^∞ telle qu'après permutation des coordonnées $U \cap M$ soit le graphe.

3.3 Espace tangent

Théorème 13. Si V est lisse en a , de dimension d , ses vecteurs tangents en a forment un sous-espace vectoriel de dimension d , appelé espace vectoriel tangent en a à V . L'espace affine est le même mais passant par a .

Théorème 14. Dans une sous-variété définie implicitement, l'espace vectoriel tangent est défini par les équations $\sum \partial_j f_i(a) v_j = 0$ pour tout i entre 1 et p .

3.4 Les groupes classiques

Théorème 15. [6]

1. $SL_n(\mathbb{R})$: espace tangent en Id est les matrices de traces nulles, variété de dimension $n^2 - 1$

2. $SL_n(\mathbb{C})$: espace tangent en Id est les matrices de traces nulles, variété de dimension $2(n^2 - 1)$

3. $O_n, SO_n(\mathbb{R})$: espace tangent en Id est les matrices telles que ${}^t M = -M$, variété de dimension $n(n-1)/2$

4. $U_n(\mathbb{C})$: espace tangent en Id est les matrices telles que ${}^t \bar{M} = -M$, variété de dimension n^2

Developpements: Hadamard-Levy, Inversion locale avec point fixe, lemme de Morse

References

- [1] Rouvière
- [2] zuily-Queffelec
- [3] Beck
- [4] Gourdon analyse
- [5] Lelong-ferrand Arnaudiès géométrie
- [6] Mnémé Testard