

215: applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exemples et applications

Pierre Lissy

March 3, 2010

1 Applications différentiables et de classe C^1 , C^k

1.1 Dérivée par rapport à un vecteur, dérivées partielles

Définition 1. On considère une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Soit $a \in \Omega$. On considère l'application qui à t assez petit associe $f(a + th)$. La dérivée en 0 de ce vecteur est appelée dérivée suivant h , noté $\partial_h f$. La dérivée suivant le vecteur de la base canonique numéro i sera notée $\partial_i f$.

Proposition 1. La dérivée suivant h en $f(a + t_0 h)$ est la dérivée de l'application précédente en t_0 .

Exemple 1. [1] L'application y^2/x et $f(0, y) = 0$ est dérivable dans toutes les directions.

Une fonction admettant des dérivées partielles n'est pas nécessairement continue.

Exemple 2. l'indicatrice de $x \neq y$.

Remarque 1. On a invariance si l'on change de normes au départ ou à l'arrivée.

A partir des formules sur les dérivées réelles on retrouve celles pour les dérivées directionnelles.

1.2 Application différentiable

Définition 2. f différentiable en a ssi il existe une application linéaire notée $df(a)$ telle que $f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + o(h)$.

Définition 3. f différentiable ssi différentiable en tout point de Ω .

Définition 4. Si on arrive dans $\mathbb{R}$, on peut parler du gradient de f en a qui est le vecteur qui représente la forme linéaire.

Proposition 2. [2] On se place dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3. Une application différentiable admet des dérivées dans toutes les directions, notamment $df(a)(h) = \partial_h f = \sum h_i \partial_i f(x)$, mais réciproque fausse.

Exemple 3. $xy/(x^2 + y^2)$.

Définition 5. Jacobienne: la matrice des $\partial_j f_i$. On a alors $Df(x)(h) = J_f(x)h$.

Exemple 4. Exemple précédent : fonction pas diff en 0.

1.3 Stabilité de la notion de différentiabilité

Théorème 1. 1. f et g diff en $a \Rightarrow f + g$ aussi et $d(f + g)(a) = df(a) + dg(a)$

2. F forme multilinéaire. On s'intéresse à $g = F(f_1, \dots, f_n)$. Si les f_i sont différentiables en a il en est de même de g et $dg(a) = F(df_1(a), f_2, \dots, f_n) + \dots$

3. f diff en a et g diff en $f(a) \Rightarrow g \circ f$ diff en a et $d(g \circ f)(a)(h) = dg(f(a))(df(a)(h))$.

4. f diff en a , et f bijection alors $df(a)$ inversible et $\rightarrow f^{-1}$ est diff en a et $d(f^{-1})(a) = (df)^{-1}(f(a))$

1.4 Lien avec la variable complexe

Théorème 2. $[2]f = g + hi$ holomorphe ssi f est différentiable vu comme fonction d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on a $\partial_1 g = \partial_2 h$ et $\partial_2 g = -\partial_1 h$, ssi la jacobienne est une matrice de similitude directe, ssi f est une application conforme en tout point.

1.5 Applications de classe C^1, C^k

Définition 6. f de classe C^1 ssi diff en tout point de différentielle continue. n fois différentiables : par réc on a $f^{(n-1)}$ différentiable de différentielle notée $f^{(n)}$. De même de classe C^k ssi n fois diff et $f^{(n)}$ continue.

Théorème 3 (Schwarz). L'application différentielle n -ième est une application n -linéaire symétrique.

Exemple 5. Une application linéaire est de classe C^∞ et sa différentielle en tout point est la constante qui est elle-même. On a de même les applications bilinéaires, quadratiques, multilinéaires, etc. Une application cste est de diff nulle.

2 Inégalité des accroissements finis, formules de Taylor

2.1 La formule

Théorème 4. On suppose le segment $[x, y]$ inclus dans Ω . On suppose qu'on a $Df(x) \leq k$. Alors $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$.

Application 1. Une fonction de classe C^1 sur un convexe est lipschitzienne

Application 2.

2.2 Relation entre différentiabilité et dérivées partielles

Théorème 5. Une fonction est de classe C^1 ssi ses dérivées partielles existent et sont continues

C'est souvent ce théorème qu'on utilise en pratique pour voir si une fonction est C^1 .

2.3 Suites, séries de fonctions différentiables

Théorème 6. f_n suite de fonction différentiables sur Ω qui CVS en point a et dont les différentielles CVU vers g . Alors f_n CVS vers une certaine f , f est différentiable de différentielle g et de plus la CV est uniforme sur toute partie bornée. Même énoncé avec fonctions $C^1, C^2, \dots$

Exemple 6.

2.4 Raffinements de l'inégalité de la moyenne

Théorème 7. $[2][page 113]F$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que le segment $[a, b]$ est inclus dans U . Alors il existe c tel que $f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$.

Théorème 8. Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ on a seulement existence de c tel que $\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(c)\| \cdot \|b - a\|$.

On rappelle que si on arrive pas dans $\mathbb{R}$ on a aucun espoir d'espérer trouver une égalité des accroissements finis.

Exemple 7. L'exponentielle complexe e^{it} .

2.5 Taylor-Young, Taylor-reste intégral, Taylor-Lagrange

3 Points critiques, extremums

3.1 Conditions du premier ordre

Théorème 9. f différentiable admet un extremum en $a \Rightarrow df(a) = 0$

Réciproque fausse. Il y a un cas où la réciproque est vraie on le verra après.

Exemple 8. $f(x, y) = x^3 + y^3$ en 0.

Extremum local mais pas forcément global.

Exemple 9. $x^2(x - 1)^2$

3.2 Conditions du second ordre

Théorème 10. f deux fois différentiable admet un minimum en $a \Rightarrow d^2f(a)$ est positive. a critique et $a \Rightarrow d^2f(a)$ strictement positive implique minimum.

Réciproques fausses.

Exemple 10. $[1]x^2 - y^3$. $x^2 + y^4$.

3.3 Cas des fonctions convexes

Proposition 4. [3] Soit f une fonction deux fois différentiable d'un convexe C de $\mathbb{R}^n$. f est convexe si et seulement si la différentielle seconde de f est une forme bilinéaire symétrique positive. Si cette forme quadratique est strictement positive, alors f est strictement convexe mais la réciproque est fausse.

Théorème 11. Soit C un ouvert convexe et f une fonction convexe. Alors x est un minimum ssi $df(x) = 0$.

Application 3. [2] Dans le plan ou l'espace, il existe un unique point minimisant la somme des distances à trois points non alignés (point de Fermat).

Proposition 5. Soit C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction convexe. Alors l'ensemble des points réalisant le minimum est un convexe.

Corollaire 1. Soit C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction strictement convexe. Alors f admet au plus un minimum.

Application 4. Droite des moindres carrés. Approximation par moindres carrés.

3.4 Méthode du gradient à pas optimal, du gradient conjugué, de Newton

Théorème 12. Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On suppose f convexe, et on suppose que f s'annule en un unique point a . Soit $x_0 \in \Omega$. On pose $F(x) := x - df(x)^{-1}(f(x))$. Alors la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers a quadratiquement.

On applique ce théorème à la différentielle d'une fonction convexe de hessienne déf pos en tout point: on approche ainsi le minimum.

3.5 Extrémas liés

4 Inversion locale et fonctions implicites

4.1 Théorème d'inversion locale et applications

Théorème 13. Soit U un ouvert E , a un point de U , et f différentiable de classe C^1 . On suppose que $df(a)$ est un isomorphisme. Alors f est localement un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de a vers un voisinage de $f(a)$.

Remarque 2. Vrai en fait pour un C^k difféo.

Faux si il manque des hypothèses.

Exemple 11. $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est un difféomorphisme local en tout point privé de l'origine, mais n'est pas un difféomorphisme global (pas injectif)

Application 5. [2] Résolution de l'équation $(y-z)\partial_x f + (z-x)\partial_y f + (x-y)\partial_z f = 0$ par changement de variable. On trouve les fonctions $\varphi(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$ où φ est une fonction de classe C^1 sur $u^2 < 3v$.

Application 6. [2] Système $f(x, y) = u, g(x, y) = v$. On suppose $d\varphi$ de rang 2 en un point (a, b) de U . Alors localement on a existence et unicité de solutions. Si la différentielle est de rang 1 pour tout (x, y) , on disjuncte les cas: soit une infinité de solution, soit pas de solutions.

4.2 Théorème d'inversion globale et applications

Théorème 14. On suppose f injective sur un ouvert U et telle que la différentielle est un isomorphisme en tout point. Alors l'image de f est un ouvert et f est un C^1 difféo. De même avec C^k .

Exemple 12. [2] L'application $f(x, y) = (x+1, xy) = (s, p)$ est un difféomorphisme de $U = \{x > y\}$ et $V = \{s^2 > 4p\}$. De plus, U est un ouvert connexe maximal tel que f soit un difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Application 7. [?] [Hadamard-Levy] f de classe C^1 (resp C^k) de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. F est un difféo ssi f est propre et la jacobienne est inversible en tout point

Application 8. [2] Une application C^k k -dilatante est un difféo sur $\mathbb{R}^n$.

Application 9. Une application holomorphe injective est biholomorphe.

4.3 Théorème des fonctions implicites et applications

4.4 Le théorème

Théorème 15. f de $U \times V$ vers G de classe C^1 (ou C^k). On suppose $f(a, b) = 0$. On suppose que la différentielle partielle par rapport à la deuxième variable est un isomorphisme. Alors l'équation $f(x, y) = 0$ se résout localement sous la forme: $x \in U', y \in V', f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x \in U', y = \varphi(x))$ avec φ de classe C^k .

Exemple 13. [2] $x^2 + y^2 - 1 = 0$ s'inverse localement sauf si $y = 0$. On a deux fonctions implicites.

Remarque 3. On peut calculer facilement les dérivées de la fonction implicite en réinjectant dans l'équation.

Exemple 14. Paramétrage précédent $\varphi'(x) = -x/y = -x\varphi(x)$.

4.5 Courbes et surfaces définies par des équations implicites

Définition 7. On considère une application f qui définit une courbe implicite dans le plan. Un point est dit ordinaire ssi $df(M)$ est non nul, singulier sinon.

Théorème 16. On considère un point ordinaire M_0 de la courbe plane Γ d'équation $f = 0$. On peut alors paramétrer l'arc localement de manière cartésienne, et la tangente à cet arc est $df(M_0)(M - M_0)$.

Théorème 17. Un point ordinaire est un point d'inflexion ssi il vérifie $H(x, y) = 0$ avec H la fonction suivante:

$$H(x, y) = f_x^2 f_{xy} - f_x f_y (f_{x^2} + f_{y^2}) + f_y^2 f_{xy}$$

Théorème 18. On considère la forme quadratique qu'est la différentielle seconde, en un point singulier $Q(x, y) = d^2 f(M_0)(x, y)^2 = rx^2 + 2sxy + ty^2$. On a différents cas, donnés par le lemme de Morse:

1. φ déf pos, $rs - t^2 > 0$ (res def neg): f admet un minimum (resp max) strict en ce point
2. φ pas définie, mais non dégénéré $rs - t^2 < 0$: sur un voisinage c'est le seul point singulier, et la courbe est localement la réunion de deux arcs simples réguliers, et les tangentes sont d'équation $Q(x - x_0, y - y_0) = 0$.

References

- [1] Objectif agrégation
- [2] Rouvière
- [3] Choquet