

Problèmes d'extremums

Pierre Lissy

June 5, 2010

1 Existence des extremums et unicité

1.1 Fonction continue sur un compact

Le théorème. Les applications: d'Alembert-gauss. Les applications usuelles: distance d'un point à un compact dans un evn atteinte, d'un point à un fermé atteinte si dim finie, distance de deux compacts atteinte, d'un compact et d'un fermé atteinte en dim finie. Faux si distance entre deux fermés même en dim finie (hyperbole et droite). On applique ceci notamment à plei nde trucs: existence de l'approximation

Applications continues 'coercives' dans un evn de dim finie admettent un minimum (application notamment à l'approximation: points de fermat du rouviere).

Applications sci d'un compact: admet une borne inf(choquet). Applications sci d'un evn de dim finie tendant vers ∞ : admet aussi un min. Application du choquet à la longueur d'une courbe. Faire le lien avec l'inégalité isopérimétrique du ZQ?

1.2 Fonction convexe sci sur un fermé borné convexe en dim infinie

Existence d'un min. Applications à la projection sur un convexe fermé, à Lax-Milgram version symétrique. Résolution de quelques EDP vues comme des problèmes de minimisation et applications Projection sur un convexe fermé: les applications usuelles (espérance conditionnelle, approximation, stampachia, hahn banach géométrique...) polynômes orthogonaux, éventuellement déterminant de Gram et Muntz? Moindre carrés, approx quadratique?

Penser aussi à moindres carrés du Rouviere.

1.3 Fonctions strictement convexes

Les fonctions strictement convexes ou Log-convexes: si elles admettent un min celui-ci est unique. Application à l'ellipsoïde de John.

2 Localisation des extremums

2.1 Condition du premier ordre

Points critiques et lemme de Sard du Rouviere. Contre-exemple. Lemme de Sard du Rouviere. à savoir Rolle, accroissements finis, utilisation de Rolle pour démontrer les formules d'erreur dans l'interpolation de Lagrange.

2.2 Condition du second ordre

Condition nécessaire, condition suffisante mais aucune des deux n'est nécessaire ni suffisante.

2.3 Cas des fonctions convexes

Y a plein de choses à dire. Rappeler d'abord les caractérisations des fonctions convexes. Un point est extrémal ssi critique, et alors l'ensemble des points extrémaux est un convexe. Si strictement convexe unicité du point si existence comme déjà vu. Parler aussi d'optimisation sur un convexe inclus dans un ouvert: condition d'inégalité. Application de l'ensemble des points est un convexe: minimisation de la norme 1: unicité pour les polynômes. Unicité pour la norme p vraie car on a existence et stricte convexité. Pour la norme infinie, voir le détail? Tchebitchev? Sibony ouais à voir.

2.4 Extremes liés

On a l'application du Beck, la démo dans Ciarlet. Autres applications dans Rouvière 'axes principaux d'une quadrique, inégalité d'Hadamard, entropie, billard. Diagonal symétrique.

Equation d'Euler-Lagrange.

2.5 Principe du maximum

Principe du maximum et nombreuses applications (Lemme des trois droites d'Hadamard, Riesz-Thorin,... lemme des trois cercles). Exos 7 et 8 du Beck. Regarder aussi le cartan. Equation de la chaleur ZQ page 108. Principes du maximum du ZQ.

3 Optimisation numérique

3.1 Newton

Regarder Ciarlet et Beck.

3.2 Gradient à pas fixe

On utilise le fait que le gradient est la direction de plus forte décroissance locale. Pas très efficace (convergence en zigzag)

3.3 Gradient conjugué

Notamment faire le lien avec la résolution des systèmes linéaires.

3.4 Méthode de relaxation avec ou sans contrainte

Voir dans le Ciarlet mais ça semble assez efficace.

References

[1]