

221: équations différentielles linéaires. Exemples

Pierre Lissy

April 28, 2010

1 Etude théorique

1.1 Généralités sur les systèmes linéaires d'équations différentielles

Définition 1. Equation différentielle linéaire dans $\mathbb{R}^n$: $X' = AX + b$, avec $A \in C^0(I, M_n(K))$ et $b \in C^0(I, K^n)$ des fonctions continues.

Remarque 1. Si l'on s'intéresse à un système linéaire d'ordre plus élevé $Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \dots + b(t)$ alors on peut le ramener à un système d'ordre 1 en considérant l'équation $d/dt \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \dots & \dots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} \oplus$ (On se ramène à un système de la forme précédente en utilisant l'isomorphisme canonique entre $M_{n,p}(K)$ et K^{np}).

Proposition 1. Une solution d'un système linéaire tel que défini au-dessus est nécessairement de classe C^1 sur son intervalle de définition.

1.2 Problème de Cauchy

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz). : $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ avec f continue globalement lipschitz en x se résout de manière unique globalement.

Lemme 1 (Gronwall). Si $f(t) \leq k + l \int_{t_0}^t f(t') dt'$ alors $f(t) \leq ke^{L \int_{t_0}^t (f(t') dt')}$

Il sert dans les problèmes de globalisation.

Théorème 2 (sortie de tout compact). Toute solution définie sur un intervalle non bornée explose (elle sort de tout compact)

Théorème 3. Le problème de Cauchy a une unique solution. De plus, cette solution est définie sur tout l'intervalle de définition I . Enfin, l'ensemble des solutions est un espace affine dont la direction est l'ensemble des solutions du système dit homogène associé à l'équation $X' = AX$.

On a une réciproque partielle.

Théorème 4. On considère un F affine de dimension finie de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stable par translation. Alors F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

1.3 Wronskien

Définition 2. On se donne des solution $V_1, \dots, V_n$. Le wronskien est la quantité suivante: $W : t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t))$

Proposition 2. Le wronskien ne s'annule jamais ssi le wronskien est non identiquement nulle ssi $V_1, \dots, V_n$ forment une base de solutions

Théorème 5. On vérifie que le Wronskien vérifie l'équation différentielle suivante: $W'(t) = \text{Tr}(A(t))W(t)$. Ainsi, $W(t) = W(a)e^{\int_{t_0}^t A(t)dt}$.

Le wronskien a de nombreux intérêts théoriques.

Application 1. On considère une équation $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, et on considère une base de solutions. Alors entre deux zéros consécutifs d'un élément de la base on met un unique zéro de l'autre élément.

Application 2. On considère x une solution non nulle de $x'' + r(t)x = 0$, y une solution non nulle $y'' + r(t)y = 0$. Si x et y ne sont pas proportionnelles alors entre deux zéros de x on met au moins un zéro de y . Ainsi, toute solution de $y'' + q(t)y = 0$ avec $q(t) \geq \lambda^2$ s'annule au moins une fois sur tout intervalle de longueur π/λ .

1.4 Résolvant.

Définition 3. Résolvant du système $x' = a(t)x$: l'application $R : I^2 \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que pour tout t_2 , l'application $R(\cdot, t_2)$ est solution du problème de Cauchy matriciel $M' = A(t)M$, $M(t_2) = Id$.

Proposition 3. La résolvante jouit des propriétés suivantes.

1. $R \in C^0$
2. $R(t, t) = Id$
3. $R(t_1, t_2)R(t_2, t_3) = R(t_1, t_3)$. En particulier $R(t_1, t_2)$ est inversible d'inverse $R(t_2, t_1)$
4. R est en fait de classe C^1 et $R_1(t, \tau) = A(t)R(t, \tau)$, $R_2(t, \tau) = -R(t, \tau)A(\tau)$
5. $\det(R(t, t_0)) = \exp(\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(\tau))d\tau)$.

Intérêt majeur de la résolvante:

Théorème 6 (principe de Duhamel). : x solution du système linéaire $x' = A(t)x + b(t)$ avec $x(t_0) = x_0$ ssi x continue et vérifie $x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, \tau)b(\tau)d\tau$.

Application 3. On a notamment la continuité de la solution par rapport à la condition initiale, par propriété de la résolvante.

2 Méthodes de résolution explicites

2.1 Coefficients constants

Théorème 7. La solution du système autonome est de la forme $e^{(t-t_0)A}c$ avec $x(t_0) = c$.

Remarque 2. On a le même résultat si on suppose que A est telle que $A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$, notamment si A est de la forme $a(t)B$, mais pas dans le cas général.

Corollaire 1. La solution du système général $x' = Ax + b$ avec $x(t_0) = c$ est $e^{(t-t_0)A}c - b$.

Pour calculer l'exponentielle d'une matrice de manière explicite, on a besoin de la décomposition de Dunford en général.

Proposition 4. Si la décomposition de Dunford de A est $A = D + N$, alors cette de $\exp(A)$ est $\exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - 1)$.

Application 4. La décomposition de Dunford étant effective (une fois les valeurs propres connues, donc la découverte n'est elle pas effective, sauf en dimension inférieure ou égale à 4), on peut calculer de manière effective l'exponentielle d'une matrice. Rappelons que dès qu'on aura obtenu la partie diagonalisable ça sera fini. Or cette partie diagonalisable s'écrit sous la forme (décomposition spectrale) $\sum \lambda_i p_i$ où λ_i sont les valeurs propres et les p_i les projecteurs sur les sous-espaces caractéristiques. On suppose que les valeurs propres sont calculées (c'est la le principal souci quand même, mais bon...). Il reste donc à trouver les projecteurs. On considère le polynôme caractéristique scindé $\prod (X - \lambda_i)^{r_i}$. On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $1/\prod (X - \lambda_i)^{r_i}$. On obtient $1/\chi_A = \sum_i \sum_j x_{ij}/(X - \lambda_i)^j$. Posons $U_i := \sum_j^{r_i} (X - \lambda_i)^{r_i-j}$. Alors $1 = \sum U_i Q_i$ avec $Q_i := \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{r_j}$. Les projecteurs sont alors donnés par $U_i Q_i(A)$. L'exponentielle de la matrice est alors facilement calculable par la formule au-dessus.

Exemple 1. Exponentielle de la matrice page 199 du Gourdon algèbre, ou exo page 363 gourdon analyse

Application 5. Sous-groupes à un paramètre de $GL_n(k)$ forcément de la forme $t \mapsto \exp(tA)$.

2.2 Système linéaire scalaire d'ordre n, avec second membre sympathique

On souhaite résoudre $a_n f^{(n)} + \dots + a_1 f' + a_0 f = 0$. Le second membre est pour le moment nul. On lui associe le polynôme $P = \sum a_i X^i$.

Théorème 8. On décompose P en irréductibles: $P = \lambda \prod (X - \lambda_i)^{n_i}$. Les solutions de l'équation différentielle précédente sont de la forme $e^{\lambda_i t} P_i(t)$ où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n_i .

Corollaire 2. On s'intéresse maintenant à une équation avec second membre de la forme $e^{at} P_i(t)$. On considère maintenant le polynôme $\chi = X^{n-1} + \dots + a_0$. On appelle m la multiplicité de a en tant que racine de ce polynôme. Il existe une unique solution de notre équation de la forme $t^m e^{at} Q(t)$ avec Q de même degré que P .

Exemple 2. Equations de degré 2: se résolvent facilement.

2.3 Variation de la constante

Proposition 5. On suppose connus une base de solutions du système homogène associé, notée V_i . On cherche alors une solution de $X' = A(t)x + B(t)$ sous la forme $f(t) = \sum \lambda_i(t) V_i(t)$. En injectant ceci, on voit que $\sum \lambda_i'(t) V_i(t) + \lambda_i(t) V_i'(t) = A(t) \sum (\lambda_i(t) V_i(t)) + b(t)$ et donc que $\sum \lambda_i'(t) V_i(t) = b(t)$. C'est un système de Cramer que l'on peut donc inverser. On obtient les λ_i' puis en intégrant, les λ_i .

Exemple 3. $y' + y = \sin(t)$ se résoud en $(\sin(t) - \cos(t))/2 + \mu e^{-t}$.

Exemple 4. $y'' + y = \tan^2 t$ se résoud en $\cos(t) + b \sin(t) - 2 + \sin(t) \log(\tan(\pi/4 + t/2))$

2.4 Abaissement de l'ordre

On considère encore une fois une équation différentielle scalaire d'ordre n . Supposons connue une solution particulière φ de l'équation. On cherche alors les autres solutions sous la forme $g\varphi$. On se ramène en fait à une équation différentielle d'ordre $n - 1$ sur g' , de la forme $\sum_{k=1}^n C_n^k g^{(k)} \varphi^{(n-k)} = a_{n-1}(t) \sum_{k=1}^{(n-1)} C_{n-1}^k g^{(k)} \varphi^{(n-1-k)} + \dots a_1 g' \varphi$.

Exemple 5. En dimension 2, $y'' = a(t)y' + b(t)y$, alors g est solution de $2g'\varphi' + g''\varphi = ag'\varphi$.

2.5 Changement de variable

Exemple 6. Résoudre $f'(t) = d'1/t$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On remarque qu'en fait f est solution de $t^2 f''(t) + f(t) = 0$. Cette équation se résout à l'aide du changement de variable $t = e^x$. On trouve finalement $f(t) = c\sqrt{t}\cos(\sqrt{3}/2\log(t) - \pi/6)$.

Remarque 3. Toute équation d'Euler se résout de cette manière.

2.6 Utilisation des séries entières

L'idée est la suivante: si l'on considère une équation linéaire scalaire d'ordre n à coefficients polynomiaux, notée $l_n a^{(n)} + l_{n-1} a^{(n-1)} + \dots + l_0 a = 0$, alors on cherche une série formelle vérifiant cette équation différentielle. On obtient une relation de récurrence sur les a_i et on vérifie ensuite qu'on a un rayon de convergence non nul pour vérifier qu'on a pas fait quelque chose de formel uniquement.

Exemple 7. $t^2 y'' + (a+1)ty' + (t^2 + 1/4)y = 0$. On cherche une solution sous la forme $t^\alpha \varphi(t)$ où φ est une somme de série entière. On montre que les coefficients vérifient la relation $[(\alpha + n)(\alpha + n - 2) + (a+1)(\alpha + n) + 1/4]u_n + u_{n-2} = 0$ qui se résout (si l'on impose $\varphi(0) = 1$) que $u_{2n} = 1/(\prod P(\alpha + 2k))$ avec $P = X(X-1) + (a+1)X + 1/4$ et $u_{2n+1} = 0$. On en déduit le comportement asymptotique en 0^+ .

3 Etude qualitative

3.1 Stabilité des systèmes différentiels au voisinage d'un point d'équilibre

Lemme 2. e^{tM} tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ ssi M a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative. e^{tM} reste bornée ssi toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative ou nulle, et pour celles ayant une valeur propre nulle le sous-espace propre est égal au sous-espace caractéristique (ie les blocs de Jordan sont de taille 1).

Théorème 9. Le système différentiel $X' = AX$ tend exponentiellement vers 0 (asymptotiquement stable) en $+\infty$ ssi les valeurs propres sont toutes de partie réelle strictement négatives. Stable ssi autre condition. instable sinon.

Application 6 (Lyapunov). On considère un système différentiel $y' = f(y)$, $y(0) = x$ avec f de classe C^1 tel que $f(0) = 0$. On pose A la différentielle de f en 0. Si A a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point attractif exponentiellement stable.

3.2 Systèmes différentiels autonome en dimension 2

On s'intéresse à un système différentiel linéaire en dimension 2 $x' = Ax$ avec A inversible.

Théorème 10. Selon la nature des valeurs propres, on a 10 cas différents.

1. deux valeurs propres réelles strictement négatives: noeud stable
2. deux vp réelles strictement positives: noeud instable
3. deux vp réelles de signe différent: point selle
4. deux vp complexes conjuguées de partie réelle < 0 : foyer stable
5. deux vp complexes conjuguées de partie réelle > 0 : foyer instable
6. deux vp complexes conjuguées de partie réelle $= 0$: centre
7. une vp réelle double, de partie propre de dimension 2, strictement négative: puits
8. une vp réelle double, de partie propre de dimension 2, strictement positive: source
9. une vp réelle double, de partie propre de dimension 1, strictement négative: foyer dégénéré stable
10. une vp réelle double, de partie propre de dimension 1, strictement positive: foyer dégénéré instable

3.3 résultats asymptotiques

Théorème 11. On s'intéresse à un système autonome $X' = A(t)X$ où pour tout t la symétrisée de A est négative. Alors L admet une solution non identiquement nulle qui tend vers 0 en ∞ ssi $\int_0^\infty \text{Tr}(A(s))ds = -\infty$.

Théorème 12. On considère une équation différentielle $y'' + q(t)y = 0$ avec $\int_0^\infty t|q(t)| < \infty$. Alors y' converge en ∞ .

Théorème 13. On considère $y'' + q(t)y = 0$ avec q strictement positive croissante. Avec Gronwall on démontre que toutes les solutions sont bornées.

Théorème 14. On considère $y'' + q(t)y$ avec q définie sur $\mathbb{R}$ strictement négative. Alors la seule solution bornée est la fonction nulle.

4 Controllabilité d'une EDO linéaire

4.1 Définition

Définition 4. On s'intéresse à un système à un paramètre $u \in C^0([T_0, T_1], \mathbb{R})$ écrit sous la forme $x' = Ax + Bu$. u est appelé contrôle. Un tel système est appelé système de contrôle linéaire.

Définition 5. Le système ci-dessus est dit contrôlable ssi $\forall (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n, \exists u | x(T_0) = x_0, x(T_1) = x_1$.

4.2 Critère de Kalman

Définition 6. Gramian de contrôlabilité: $C := \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau)B(\tau)B(\tau)^t R(T_1, \tau)^t d\tau$

Remarque 4. C'est une matrice symétrique positive.

Théorème 15. le système est contrôlable ssi son gramian de contrôlabilité est inversible.

Exemple 8. $x'_1 = u, x_2 = x_1 + tu$, le gramian de contrôlabilité est $\begin{pmatrix} T & T^2 \\ T^2 & T^3 \end{pmatrix}$, donc le système n'est pas contrôlable.

Théorème 16. Le contrôle explicite construit dans la démonstration précédente (à savoir $\bar{u}(t) = B(\tau)^t R(T_1, \tau)^t C^{-1}(x_1 - R(t_1, T_0)x_0)$ est parmi les contrôles qu'on peut choisir celui qui a la plus petite norme 2.

Remarque 5. Evidemment ce théorème a en général un intérêt purement théorique (on sait pas calculer la résolvante en général)

Voici un critère pratique

Théorème 17. On construit la suite $B_0 = B, B_i = B'_{i-1} - AB_{i-1}$. Si l'espace vectoriel engendré par les B_i est pour un certain t l'espace tout entier, alors le système est contrôlable.

Remarque 6. Dans le cas où ça ne dépend pas du temps, la suite B_i devient $B_i = (-1)^i A^i B$.

4.3 Linéarisé et équation non linéaire

Définition 7. On considère un système non linéaire $x' = f(x, u)$, et une trajectoire particulière $(\bar{x}, \bar{u})$ de ce système. Un tel système est dit localement contrôlable le long de la trajectoire ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 |$ pour tout a dans la boule centrée en $\bar{x}(T_0)$ de rayon η , pour tout b dans la boule centrée en $\bar{x}(T_1)$ de rayon η , il existe une autre trajectoire qui part de a et va en b en ne s'éloignant pas plus de ε en norme infinie de $\bar{u}$.

Théorème 18. On suppose que le système linéarisé autour de la trajectoire $(\bar{x}, \bar{u})$ est contrôlable. Alors le système non linéaire est localement contrôlable le long de la trajectoire.

References

[1]