

Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

Pierre Lissy

June 8, 2010

1 Suites et construction de $\mathbb{R}$

1.1 Construction de $\mathbb{R}$

[1]

Définition 1. Suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ = pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, on a existence d'un entier N tel que $n, m \geq N \rightarrow |u_n - u_m| \leq \varepsilon$.

On considère E l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$. E est un espace vectoriel.

Définition-proposition 1. On considère les classes d'équivalence pour la relation d'équivalence suivante: deux suites sont équivalentes ssi leur différence tend vers 0. Les nombres réels sont les classes d'équivalence.

Proposition 1. La relation d'équivalence est compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire, on a donc fabriqué l'addition et la multiplication.

Théorème 1. $\mathbb{R}$ est un anneau commutatif intègre. C'est même un corps.

Proposition 2. On injecte $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante: à r rationnel on associe la suite constante est égale r .

Définition 2. Les réels positifs = un des représentants à toutes ses composantes positives.

Proposition 3. $\mathbb{R}^+ \cap -\mathbb{R}^+ = \{0\}$.

Définition-proposition 2. Relation d'ordre $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+$. Pour cette relation $\mathbb{R}$ est totalement ordonné

On déduit à partir de la toutes les relations sur les inégalités, et la propriété de la borne supérieure, etc.

1.2 convergence dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 3. $u_n \rightarrow l \Leftrightarrow$ Pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ tq $n \leq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$. Ceci revient à dire: Pour tout $\varepsilon > 0$, $n \leq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang. Sinon, la suite est dite divergente.

Exemple 1. Suite sous-additive: $a_n + a_m \leq a_{n+m}$: une telle suite vérifie que a_n/n est convergente.

Exemple 2. $1/n^n \sum k^n$ tend vers $e/(e-1)$.

Exemple 3. $u_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \dots}}$ u_n cv ssi $a_n^{1/2^n}$. $\lim \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\dots}} = 3$.

Il existe des suites non cv.

Exemple 4. n

Mais c'est pas un bon exemple (on pourrait définir une cv dans $\mathbb{R}$).

Exemple 5. $(-1)^n$

Proposition 4. *Notion de convergence stable par les opérations algébriques.*

La propriété de la borne sup nous donne:

Proposition 5. *Toute suite croissante majorée converge. Toute suite décroissante minorée converge.*

Exemple 6. [2][page 59] La suite suivante: $u_k = \sum_{n=1}^k (-1)^n C_n^k \ln(k)$ est strictement croissante et on montre qu'elle est majorée donc elle cv.

Théorème 2. u_n CV ssi u_n est de Cauchy.

1.3 Valeurs d'adhérence

Définition 4. *Limite sup = $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} u_k$ existe toujours (mais peut valoir $+\infty$). Idem limite inf*

Définition-proposition 3. *Valeurs d'adhérence: ensemble des $\bigcap \bar{X}_n$ où $X_n = \cup_{k \geq n} u_k$. C'est l'ensemble des valeurs telle qu'on peut trouver une suite extraire qui tend vers cette valeur. C'est aussi l'ensemble des valeurs telles que pour tout ε , $|u_n - l| \leq \varepsilon$ infiniment souvent.*

Les limites sup et inf existent toujours.

Exemple 7.

Remarque 1. On a la remarque suivante, assez utile en proba (cf plus tard): $z > \limsup$ implique que $u_n < z$ ev. $z < \limsup$ implique que $u_n > z$ io.

La convergence est liée aux valeurs d'adhérence par le théorème suivant.

Théorème 3. u_n cv ssi la lim sup est égale à la lim inf (et est pas infini).

Critère en pratique utile.

Application 1. On considère une suite bornée tq $u_n + u_{2n}/2$ CV. Alors e_n cv.

Application 2. On considère deux suites tq $a_n + b_n \leftrightarrow 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} \leftrightarrow 2$. Les deux suites convergent avec 0. On considère maintenant 3 suites tq $a_n + b_n + c_n \leftrightarrow 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} \leftrightarrow 3$. Les deux suites convergent avec 0.

Application 3. x_n cv ssi pour tout t , e^{itx_n} cv. On en déduit qu'une limite de gaussienne est gaussienne.

Remarque 2. Une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence cv vers cette valeur.

On en déduit le fait suivant.

Théorème 4. u_n cv ssi u_n est de Cauchy.

1.4 Convergence au sens de Cesaro

Définition 5. u_n converge au sens de Cesaro ssi la moyenne des u_n cv.

Proposition 6. u_n cv $\Rightarrow u_n$ est cv au sens de Cesaro. On a même le résultat suivant: si A_n est une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$, alors la suite des moyennes pondérées par les A_n converge vers l .

Proposition 7. u_n cv au sens de Cesaro vers 0 ssi il existe une partie $A \subset \mathbb{N}$ de densité nulle tq $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$.

Proposition 8. On considère l'ensemble des suites de norme p est égale à 1, notée E_p . Alors l'application qui à une suite u_n associe la limite l de ses moyennes a pour image le polygone régulier à p côtés.

Proposition 9. On considère une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ et v_n la suite de Cesaro associée. Si elle est bornée alors f admet un point fixe.

1.5 Vitesse de CV et Accélération de convergence

Définition 6. On considère une suite convergente et la quantité $(u_{n+1} - a)/(u_n - a)$. Si la suite a une limite, on parle de convergence

1. lente si c'est 1
2. géométrique si c'est compris entre 0 et 1
3. rapide si elle vaut 0

On accélère les deux premières mais pas la dernière

On cherche en général à approximer la limite avec les suites plus que trouver la limite. On aimerait donc pouvoir le faire avec peu d'itérations. Manière générale d'accélérer la convergence: on fait un équivalent. $a_n - l = v_n + o(v_n)$. On considère la nouvelle suite $a_n - v_n$, elle converge plus rapidement vers l que a_n .

Exemple 8. Suite $a_n \sum_{k=1}^n 1/k^2$. On sait que le reste d'ordre n est équivalent à $1/n$. Donc $a_n = \pi^2/6 - 1/n$ va aussi converger, et plus rapidement: $a_n = \pi^2/6 - 1/n + O(1/n^2)$.

On a sinon une méthode dite de Richardson pour les convergences géométriques. Si $u_n = \lambda + ak^n + o(h^n)$. On considère $v_n = u_{n+1} - ku_n/(1 - k)$ accélère la convergence: on a du $O(h)$.

2 Applications théoriques de la convergence des suites

2.1 Systèmes dynamiques discrets

Définition 7. Système dynamique discret: suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

2.2 Quelques petits résultats de proba

2.3 Suites équiréparties

3 Applications de la convergence des suites dans les problèmes d'approximation

Les suites sont utiles car elles permettent d'approximer des quantités pas bien faciles à calculer sinon.

3.1 Sommes de Riemann et méthode des trapèzes, Simpson

3.2 Méthode de Newton

Définition-proposition 4. [4] On considère une fonction f de classe C^2 qui a un 0 en x_0 . La suite suivante: $u_{n+1} = F(u_n)$ avec $F(x) = x - f(x)/f'(x)$ converge localement quadratiquement vers 0. Si l'on suppose $f''(x) > 0$, alors la convergence est globale et quadratique.

Exemple 9. $f(x) = x^2 - y$. On approxime la racine carré d'un nombre. $F(x) - a = (x - a)^2/2x$. l'erreur est alors en 2^n .

3.3 Méthode de la puissance

Proposition 10. On considère un endomorphisme diagonalisable A qui a une valeur propre distincte maximale réelle isolée notée λ . On considère les suites suivantes:

1. $v_0 = v$
2. $v_{n+1} = Av_n / \|Av_n\|$

Alors v_n converge vers un vecteur propre et la suite (v_{n+1}, v_n) converge vers la valeur propre

Cette méthode est utilisée en pratique pour calculer valeurs propres et vecteurs propres. On peut l'étendre de la manière suivante:

Proposition 11. *On considère A diagonalisable, λ une valeur propre simple non nulle et μ un élément pas du spectre. Alors on pose la récurrence $u_{k+1} = (A - \mu I)^{-1} u_k / \|u_k\|$. u_k tend vers le vecteur propre et le même μ tend vers la valeur propre inverse.*

3.4 Calcul d'intégrales

Proposition 12. *Rappel sur l'intégrale de Riemann: si l'on considère une fonction réglée et une subdivision dont le pas tend vers 0, c_i un point intérieur à chaque intervalle de subdivision: on a $\sum (a_{i+1} - a_i) f(c_i)$ tend vers $\int_a^b f(t) dt$.*

Méthode la plus simple: rectangles.

Proposition 13. *On prend une subdivision régulière et on prend le point à gauche ou à droite. Convergence d'ordre un. On prend le point milieu: méthode des trapèzes ordre 3.*

Proposition 14. *Richardson appliquée à trapèzes donne Simpson: ordre 5.*

3.5 Approximation d'une équation diff

A faire aussi.

References

- [1] Dixmier 1
- [2] fgn analyse 1
- [3] Sibonny.
- [4] Rouvière