

# $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples

Pierre Lissy

April 28, 2010

## 1 Premiers exemples et comportement en fonction de $f$

### 1.1 Premières propriétés

**Définition 1.** *Système dynamique discret:  $u_{n+1} = f(u_n)$ , avec  $f$  réelle, complexe ou vectorielle. (définie dans un espace vectoriel normé)*

**Proposition 1.** *Si une telle suite converge, elle converge forcément vers un point fixe de  $f$ .*

**Proposition 2.** *Si  $f$  est croissante, alors on a croissance de  $u_n$  qui soit donc converge soit tend vers  $\infty$ . si  $f$  décroissante alors on a que les deux suites extraites classiques sont croissantes, la suite converge donc.*

**Théorème 1.** *On considère  $f$  continue de  $[0, 1]$  et  $[0, 1]$ , et une système dynamique  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Alors  $u_n$  cv ssi  $u_{n+1} - u_n$  tend vers 0.*

**Théorème 2.** *Soit  $f$  de  $I$  dans  $I$  continue. On considère la suite récurrente  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $u_n = x$ . Alors si on a un point 3 - priodique, o na un point  $n$  - priodique pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .*

### 1.2 Familles de suites récurrentes classiques

**Définition 2.** *Suite arithmétique:  $f(x) = x + a$ . Se résoud en  $u_{n+1} = u_0 + na$ . stationne, tend vers  $\infty$  ou vers  $-\infty$  selon lesigne de  $a$ .*

**Définition 3.** *Suite géométrique:  $f(x) = qx$ . Se résoud en  $u_n = q^n u_0$ . Trois cas:  $|q| > 1$  implique diverge vers  $\infty$ , et  $|q| < 1$  implique tend vers 0. Si  $|q| = 1$ , alors ca reste de module celui de  $u_0$ , et ca converge ssi  $q = 1$ . On a un comportement assez spécial. Si de la forme  $e^{2is\pi}$ , avec  $s$  irrationnel alors la suite, ne converge pas et meme l'ensemble des valeurs d'adhérence est  $[-u_0, u_0]$ . Si  $s$  rationnel alors la suite est périodique.*

**Définition 4.** *Suite homographique:  $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$  avec  $ad - bc \neq 0$ . Pas défini pour tout  $u_0$ . On considère la discriminant  $\Delta = (d - a)^2 + 4bc$ . Alors*

1. si  $\Delta < 0$  la suite diverge
2. si  $\Delta = 0$ , si  $\alpha$  est la racine double de  $cx^2 + (d - a)x - b = 0$  alors  $u_n \rightarrow \alpha$  et  $1/(u_n - \alpha) = 1/(u_0 - \alpha) + nc/(a - \alpha c)$ .
3. si  $\Delta > 0$ , on considère les deux racines  $\alpha$  et  $\beta$  sont les racines on a  $(u_n - \alpha)/(u_n - \beta) = ((a - \alpha c)/(a - \beta c))^n (u_0 - \alpha)/(u_0 - \beta)$  et  $u_n \rightarrow \alpha$  avec  $\beta < \alpha$ .

**Définition 5.** *Suite arithmético-géométrique:  $f(x) = ax + b$ , avec  $a \neq 1$ . Posons  $r = b/(1 - a)$ . Alors  $u_n = a^n(u_0 - r) + r$ .*

**Définition 6.** *suite arithmético-harmonique:  $f(x, y) = ((x + y)/2, 2/(1/x + 1/y))$ . On suppose  $a_0 > 0$  et  $b_0 > 0$ . Une telle suite converge vers  $l = \sqrt{a_0 b_0}$ .*

**Définition 7.** *Moyenne arithmético-géométrique.  $f(x, y) = (x + y)/2, \sqrt{xy}$ . O na convergence vers une limite  $m$  appelée moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$ . De plus, la vitesse de convergente est quadratique  $\|e_{n+1}\|_1 \leq 1/(8m)\|e_n\|_1^2$ .*

### 1.3 Cas réel: super-attraction, répulsion, attraction

**Théorème 3.** Soient  $F : \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$  admettant un point fixe  $a$ .

1. Si  $|F'(a)| < 1$ , il existe un intervalle centré en  $a$  stable par  $f$  et de plus, une suite récurrente partant de cet intervalle converge vers  $a$ . Enfin, si l'on restreint encore l'intervalle  $J$  pour que  $F'$  ne s'annule pas, on a une convergence d'ordre un :  $x_{n+1} - a \sim F'(a)(x_n - a)$ .
2. Sous les mêmes conditions et si  $F$  est maintenant supposée de classe  $C^2$  avec  $F'(a) = 0$  et  $F$  ne s'annulant pas sur  $J$ , la convergence est d'ordre 2:  $x_{n+1} - a \sim F''(a)/2(x_n - a)^2$ . Enfin, on imagine assez facilement comment la rendre d'ordre  $n$ .
3. Si  $|F'(a)| > 1$ , alors il existe un intervalle autour de  $a$  tel qu'on a répulsion: on sort de l'intervalle en temps fini.

### 1.4 Bifurcations

On considère un système dynamique paramétré. En général, le changement de paramètres fait apparaître des comportements différents. Un point à partir duquel le comportement change est appelé bifurcation.

**Exemple 1.** Etude de  $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ . On a une bifurcation en  $3/4$ . Soit  $\lambda \leq 3/4$  et on a convergence, soit  $\lambda > 3/4$  et on a convergence ssi on a stationnarité. Sinon on a deux sous-suites convergentes, on parle de point d'ordre 2.

### 1.5 Developpements asymptotiques

## 2 Applications en analyse

### 2.1 Méthode de Newton et superattraction

**Définition 8.** On veut approximer les solutions d'une équation  $f(X) = 0$ . On suppose  $f$  de classe  $C^1$  pour le moment, et que la différentielle est inversible en tout point. Alors on approxime par la relation  $x_{n+1} = F(x_n)$ , avec  $F(x) = x - df(x)^{-1}(f(x))$ .

**Théorème 4.** Supposons  $f$  de classe  $C^2$ . Alors on a localement convergence d'ordre 2 vers le zéro: si on se place assez près de  $a$ , on a  $\|u_{n+1} - a\| \leq C\|u_n - a\|^2$ . Si l'on suppose de plus que  $f$  est réelle, et que  $f''(x) > 0$ , on a  $x_{n+1} - a \sim 1/2f''(a)/f'(a)(x_n - a)^2$

**Application 1.** Optimisation: on considère une application  $f$  de classe  $C^3$  à valeurs réelles telle que la hessienne est toujours définie positive. Alors on sait qu'un point critique est nécessairement un extremum global de  $a$ . On applique donc la méthode de Newton à  $\nabla f$  qui est bien de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et inversible. On en déduit le minimum de  $a$ .

### 2.2 Critère de Kitaï

**Application 2 (Kitaï).** Soit  $E$  un Banach et  $T$  un opérateur. Un point est hypercyclique ssi  $T^n(x)$  est dense dans  $E$ .  $HC(T)$  = ensemble des points hypercycliques. Si  $E$  est séparable, et si il existe deux parties denses  $X$  et  $Y$ , et  $S$  une application de  $Y$  dans  $Y$  telle que :

1. Dans  $X$ ,  $T^n(x)$  tend vers 0
2. Dans  $Y$  même chose pour  $S$
3. Dans  $Y$ ,  $TS = Id$ .

Alors  $HC(T)$  dense dans  $E$ .

## 2.3 Méthode des approximations successives

**Définition 9.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique  $f$  une application de  $X$  dans  $X$ . Elle est dite contractante ssi  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ . Elle est dite strictement contractante ssi  $\exists k < 1$  telle que  $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ .

**Théorème 5** (de Picard). Toute application strictement contractante d'un espace métrique complet dans lui-même admet un unique point fixe  $x$ . De plus,  $x$  est la limite des itérations de  $f$  à partir de n'importe quel point  $x_0$ . Enfin, la vitesse de convergence est géométrique de rapport  $k$ :  $d(x, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$ .

Notamment, on a le critère suivant.

**Proposition 3.** Soit  $U$  un ouvert d'un espace de Banach et  $f$  une application de classe  $C^1$  de  $U$  dans  $F$  Banach. On suppose que pour tout  $x$  dans  $U$ ,  $\|df(x)\| \leq k$  avec  $k < 1$ . Alors  $f$  est strictement contractante.

**Application 3** (Cauchy-Lipschitz). Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\Omega \times \mathbb{R}^n$ . Soit  $f$  une fonction de  $I \times$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  continue localement (uniformément) lipschitzienne en espace. On considère le problème de Cauchy  $x'(t) = f(t, x(t))$  avec  $x(t_0) = x_0$ .  $((t_0, x_0) \in \Omega)$ . Alors ce problème admet une unique solution maximale.

## 2.4 Methode D'Euler explicite

**Définition 10.** On considère une équation différentielle  $y' = f(t, y)$ , avec  $f$  continue globalement lipschitzienne (pour assurer l'existence globale). On ne sait en général pas résoudre de manière explicite une telle équation. On va donc l'approcher de manière approchée. La méthode d'Euler explicite à pas constant consiste à segmenter l'intervalle  $[0, T]$  en  $n$  morceaux (le pas est  $h=T/N$ ) et on pose  $t_i = ih$ , et à chercher une solution sous la forme suivante:  $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$  et  $t_{n+1} = t_n + h$ .

**Lemme 1** (Gronwall discret). On considère une suite récurrente  $u_{n+1} = f(u_n)$  et on suppose que  $f(x) \leq (1+A)x + B$ . Alors  $u_{n+1} \leq u_0 e^{nA} + (e^{nA} - 1)B/A$ .

**Théorème 6.** La méthode d'Euler converge sous les hypothèses ci-dessous. Si l'on pose  $e_n := y(t_n) - y_n$ , alors  $|e_n| \leq (e^{K(x_n - x_0)} - 1)/KM(h, y')$  avec  $K$  le module de lipschitzianité et  $M$  le module de continuité de  $y'$ : le max des  $e_n$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

**Théorème 7.** Supposons maintenant  $f$  de classe  $C^1$ . Alors la méthode d'Euler est dite d'ordre 1:  $|e_n| \leq Ch$ .

En fait cette méthode naïve n'est pas bonne. Si le système est mal conditionné, il ne permet pas de raisonnablement approximer la solution.

## 2.5 Dynamique de population

**Définition 11.** Modèle géométrique. On considère  $r$  le taux de reproduction de la population. On considère la dynamique de population  $u_{n+1} = (1+r)u_n$ .  $u_n = (1+r)^n u_0$ . Si le taux de reproduction est négatif la population s'éteint, si il est de 0 sa stagne, si il est strictement positif ca explose.

Evidemment, pas vraiment réaliste (ne prend pas en compte la mortalité, la surpopulation...)

**Définition 12.** Pour prendre en compte la surpopulation (diminution des ressources vitales), on utilise le modèle suivant, dit logistique:  $u_{n+1} = (1+\alpha)u_n - \alpha u_n^2$ .

**Théorème 8.** Si  $0 < \alpha \leq 1$ , et  $0 < y_0 < 1 + 1/\alpha$ . Alors on a stabilisation de la population à 1.  $y_0 = 1$  est un point attractif ssi  $0\alpha \leq 2$ .

**Proposition 4.** Pour  $\alpha = 3$ , on a  $y_n$  qui est équirépartie sur  $[-2; 2]$ .

**Remarque 1.** Ce modèle correspond à l'équa diff  $x' = \alpha(x - x^2)$ .

**Remarque 2.** Pour de grandes valeurs de  $\alpha$ , on a un comportement chaotique: de petites variations de conditions initiales impliquent de grandes disparités de comportement dans la suite.

**Définition 13.** *Modèle de galton-Watson.* Modèle probabiliste, notamment utilisé pour l'extinction des noms de famille. Voir le Marie Cottrel. On appelle  $Z_n$  la population de la  $n$ -ième génération, et on note  $p_k$  la probabilité qu'une personne aient  $k$  enfants. On pose  $X_n = P(Z_n = 0)$  la probabilité de l'extinction.

**Proposition 5.** La fonction génératrice de  $Z_n$  est donnée par récurrence par la  $n$ -ième composée de celle de  $Z_0$ , qui vaut  $\sum_0^\infty p_k s^k$  par définition.

**Théorème 9.** Posons  $m = E(p_k)$ . Alors si  $m \leq 1$ , la population s'éteint presque sûrement, sinon elle s'éteint toujours avec une probabilité non nulle mais pas presque sûrement.

## 2.6 Accélération de convergence

**Définition 14.** On considère une suite convergente et la quantité  $(u_{n+1} - a)/(u_n - a)$ . Si la suite a une limite, on parle de convergence

1. lente si c'est 1
2. géométrique si c'est compris entre 0 et 1
3. rapide si elle vaut 0

On accélère les deux premières mais pas la dernière

$\Delta^2$ ? Richardson? steffensen?

## References

[1]