

Fonctions continues dérivables

Pierre Lissy

June 5, 2010

1 Continuité et dérivabilité

1.1 Les différents types de continuité

Déf continue, continuité uniforme, lipschitzienne, absolue continuité. Liens entre ces notions et contre exemples habituels (continue pas lipshitz: x^2 , continue pas uc : idem. Absolument continu ssi continue, a variation bornée et l'image de tout ensemble de mesure nulle est de mesure nulle. lipschitz implique uc implique continu. Sur un segment, continu est équivalent a uc. et app: déf intégrale de Riemann (densité de bons ensembles), continuité automatique d'une int à paramètres, théorème de Weierstrass grâce aux polynômes de bernstein. Stone-Weierstrass: théorème taubérien fort du ZQ. Parler d'Ascoli et ses applications ici? A savoir opérateurs à noyaux essentiellement.

1.2 Stabilité de la notion

Continuité stable par addition multiplication composition (on a donc une structure d'algèbre). Notamment on munit d'une structure de Banach avec la norme infinie, c'est facile. Enfin stabilité par sup inf d'un nombre fini.

1.3 Dérivée

Définition. Une fonction continue n'est pas forcément dérivable, ni même dérivable pp. Il existe ds foncions continues dériavables nulles parts (fonctions trigo lacunaires). En fait l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivable est un $G - \delta$ dense. Stabilité par addition multiplication composition (on a donc une structure d'algèbre). On donen en plus les formules explicites. Notamment on munit d'une structure de Banach avec la norme infinie sur la fonction et sa dérivée. Tout sev de fermé de fonctions dérivables de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est en fait de dimension finie (rigolo comem tout) EXERCICE très très bien du choquet: on considère $\|x + x'\|_\infty$ sur les fonctions qui s'annulent en un point x_0 . C'est une norme en fait équivalente à la norme $\|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ (une inégalité facile, l'autre par Banach-Steinhaus? Autrement dit $\|x + x'\|$ rend le truc Banach?) sev fermés des fonctions continues sur un compact: o na une caractérisation voir BECK. polynômes de meilleure approximation à réfléchir.

1.4 Dérivée et primitives

Une fonction dérivable est l'intégrale de sa dérivée. Le cadre minimal est: fonction absolument continue. Pas vrai en général comme le montre le cas de l'escalier du diable.

1.5 TVI,Rolle etc

Parler du TVI, de ses conséquences (par exemple simplicité de SO3, théorème du point fixe en dimension 1.) Rolle accroissements finis, sens de variation d'une fonction dérivable. DARBOUX (une dérivée vérifie de toute façon le TVI) Penser

1.6 Fonctions convexes dérivables

Les caractérisations et leur conséquences (convexité de exp, concavité du log et les applications habituelles en terme d'inégalité). Notamment on peut voir la log-convexité du dét comme une conséquence de ceci (sur les matrices sym). Rappeler qu'une fonction convexe est continue dérivable à gauche et à droite en tout point à dérivée à droite par exemple croissante et que du coup réciproque vraie.

2 Espaces de fonctions de classe C^k , C^∞

2.1 Définitions

Fonctions de classe C^k , il existe des fonctions de dér pas de classe C^1 . Fonctions C^∞ , différence avec la réel-analyticité e^{-1/x^2}

2.2 Taylor et developpements limités

Equivalence taylor ordre 1 diff mais faux à l'ordre supérieur; Faire du Taylor, puis le rôle successif pour obtenir l'erreur dans Lagrange Hermite etc...

2.3 Espace des fonctions C^k , C^∞

Quelques résultats: topologie, non normalisabilité.

2.4 Weierstrass

Déjà évoqué, dire que ça donne plein de trucs FGN, ou Gourdon?

3 Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres, des fonctions limites

3.1 Limite simple et uniforme

Limite simple de fonction continue pas continue, mais continue au moins sur un G-Delta dense. En fait les points de continuité d'une fonction sont un G-Delta (pas forcément dense, peut même être vide!) LES DINI bien dans le thème

3.2 Théorème de dérivation

Dérivation sous le signe. Trouver des applications peut être dans le Gourdon. Permet de créer plein de fonctions continues et dérivables.

3.3 Th cont

3.4 Th dér

Application transformée de Laplace.

References

[1]