

229. Fonctions monotones et fonctions convexes. Exemples et applications.

Pierre Lissy

December 17, 2009

1 Définitions et caractérisations

1.1 Définitions et exemples [1]

Définition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. f est dite croissante (resp. strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante) si et seulement si $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$, resp. $f(x) \geq f(y)$, resp. $f(x) > f(y)$). Elle est dite monotone (resp. strictement monotone) si et seulement si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Exemple 1. $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple 2. [1] Soit A une sous-ensemble dénombrable dense de $[0, 1]$ et α_n une suite infinie de nombre strictement positifs de somme 1. On pose $f(x) = \sum_{a < x, a \in A} \alpha_n$. f est strictement croissante sur A .

Définition 2. Soit E un evn et C une partie convexe de E . Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. f est dite convexe (resp. strictement convexe, resp. concave, resp. strictement concave) si et seulement si sa courbe est toujours au-dessous (resp. strictement au-dessous sauf aux points d'extrémité, resp. au-dessus, resp. strictement au-dessus) de toutes les cordes joignant deux points de la courbe, ie. si et seulement si $\forall (x, x') \in C^2, \forall t \in (0, 1), f((1-t)x + tx') \leq (1-t)f(x) + tf(x')$ (resp. $f((1-t)x + tx') < (1-t)f(x) + tf(x')$, resp. $f((1-t)x + tx') \geq (1-t)f(x) + tf(x')$, resp. $f((1-t)x + tx') > (1-t)f(x) + tf(x')$).

Exemple 3. Toute application affine de E dans $\mathbb{R}$ est convexe et concave sur E . $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$, concave sur $\mathbb{R}^-$.

Remarque 1. Dire que f est croissante (resp. strictement croissante, resp. convexe, resp. strictement convexe) équivaut à dire que $-f$ est décroissante (resp. strictement décroissante, resp. concave, resp. strictement concave). n se restreint donc à l'étude des fonctions croissantes, strictement croissantes, convexes ou strictement convexes.

1.2 Premières propriétés

Proposition 1. Toute fonction strictement croissante est injective.

Proposition 2. L'ensemble des fonctions croissantes sur I (resp convexes sur C) un cône (dans le sens positif) convexe. Le produit de deux fonctions croissantes positives est une fonction croissante positive. L'inverse d'une fonction croissante positive est décroissante.

Remarque 2. La différence de deux fonctions croissantes n'est pas forcément croissante: prendre 0 et x , $0-x$ est décroissante. Les deux dernières propriétés sont mises en défaut si on n'a pas la positivité: x est croissante sur $\mathbb{R}$ et x^2 n'est pas monotone.

Proposition 3. La composée d'une fonction croissante et d'une fonction croissante (resp. convexe, décroissante) est croissante (resp. convexe, décroissante). La fonction réciproque d'une bijection croissante (resp. convexe d'un intervalle I vers un intervalle J) est croissante (resp. concave).

Exemple 4. $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave. $\arccos$ est décroissante, $\arcsin$ est croissante.

Proposition 4. [1] Si f est convexe est g est concave, $\{x | f(x) \leq g(x)\}$ est convexe.

Exemple 5. Les lignes de niveau d'une fonction convexe sont des ensembles convexes.

1.3 Critères de monotonie

Théorème 1. [1] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $D \subset I$ dénombrable et f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. f est croissante si et seulement si $\forall x \in I \setminus D, \forall \delta > 0, \exists y \in (x, x + \delta) | f(x) \leq f(y)$.

Théorème 2. [1] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $D \subset I$ dénombrable et f une application continue dérivable (resp. à gauche,) droite) de $I \subset D$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est croissante si et seulement si f' (resp. f'_d, f'_g) est positive sur $\dot{I} \subset D$. Si f' (resp. f'_d, f'_g) est strictement positive sur $\dot{I} \subset D$, alors f est strictement croissante.

Remarque 3. [1] La réciproque de la dernière partie du théorème est fausse. Prenons f la fonction de l'exemple 1. Elle est strictement croissante. Soit g la bijection réciproque. On montre qu'on peut étendre g en une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, qui est dérivable et de dérivée nulle sauf sur un ensemble dénombrable (alors qu'elle est strictement croissante).

Exemple 6. $\exp$ est strictement croissante. $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $(0, 1]$, croissante sur $[1, +\infty)$. $x \mapsto (1 + \frac{1}{x})$ croissante sur $(-\infty, -1)$ et sur $(1, \infty)$ [3]. $x \mapsto \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$ (prolongée par continuité à 0.5 en 0) est décroissante sur $(-1, \infty)$.

Théorème 3. Toute fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ est injective ssi elle est strictement monotone

Proposition 5. Toute fonction strictement monotone est continue ssi $f(I)$ est un intervalle.

Application 1 (Théorème de la bijection). [3] f est un homéomorphisme de I dans J si et seulement si f est continue et strictement monotone.

1.4 Critères de convexité

Rappel: un convexe est stable par passage au barycentre.

Proposition 6. [3] f est convexe (resp. strictement convexe) ssi $\forall t_1, \dots, t_n | \sum t_i = 1, \forall x_1, \dots, x_n \in C, f(\sum t_i x_i) \leq \sum t_i f(x_i)$ (resp. $<$).

Proposition 7. [1] f est convexe ssi l'épigraphe de f est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$.

Proposition 8. [1] f est convexe ssi sa restriction à tout segment de C est convexe.

Proposition 9. [1] Soit f une fonction deux fois différentiable d'un convexe C de $\mathbb{R}^n$. f est convexe si et seulement si la différentielle seconde de f est une forme bilinéaire symétrique positive. Si cette forme quadratique est strictement positive, alors f est strictement convexe mais la réciproque est fausse.

Cette propriété permet d'exhiber beaucoup de fonctions convexes.

Exemple 7. Si a est une forme bilinéaire symétrique définie positive, $a(x, x)$ est convexe.

Réciproque fausse

Exemple 8. $(x, y) \mapsto x^4 + y^4$ est strictement convexe mais la différentielle seconde s'annule en $(0, 0)$.

Remarque 4. [1] Si une fonction deux fois différentiable définie sur une partie de C non convexe vérifie que sa différentielle seconde est inversible, alors elle est convexe sur tout sous-ensemble ouvert convexe de C mais n'est pas nécessairement convexe sur l'enveloppe convexe de C .

Supposons maintenant f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Proposition 10. [1] Soit f une fonction sci sur un intervalle ouvert I . Elle est convexe ssi $f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$.

Remarque 5. [9][P 198] Faux si pas sci

Proposition 11. [1] f est convexe ssi la fonction pente $f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ est croissante par rapport à chacune de ses variables.

Corollaire 1. [3] Soit f une fonction dérivable. Alors f est convexe ssi f' est croissante. Si f' est strictement croissante, alors f est strictement convexe.

Corollaire 2. Soit f une fonction deux fois dérivable. f est convexe ssi f'' est positive. f est strictement convexe si f'' est strictement positive sauf sur un sous-ensemble dénombrable de I .

Exemple 9. $\exp$ est convexe, $\ln$ est concave. x^α est convexe pour $\alpha \geq 1$ sur $\mathbb{R}^+$. $\sin$ est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. $\ln(1 + e^x)$ est convexe.

Application 2 (Inégalité arithmético-géométrique).

$$(a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Application 3.

$$a_1 \dots a_n \leq \frac{a_1^{p_1}}{p_1} + \dots + \frac{a_n^{p_n}}{p_n}.$$

(avec $\sum 1/p_i = 1$).

Application 4. $((1-t)x + ty)^\alpha \leq (1-t)x^\alpha + ty^\alpha$

Application 5. $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Application 6. $[5] 1 + x^a y^b \leq (1+x)^a (1+y)^b$ si $a+b=1$.

Application 7. [5] Soit A une matrice bistochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, alors $\sum_i (Ax)_i \geq \sum_i x_i$.

Théorème 4. [10] f convexe ssi $f(x) - f(y) \leq Df(x)(x - y)$.

Corollaire 3. [4] Soit f une fonction dérivable. f est convexe ssi f est au-dessus de toutes ses tangentes.

Exemple 10. $\exp(x) \geq 1 + x$. $\ln(1+x) \leq x$.

2 Régularité, stabilité des fonctions monotones ou convexes

2.1 Régularité des fonctions monotones

Proposition 12 (Théorème de convergence monotone). [1] Toute application croissante admet une limite à droite et à gauche sur chacun de ses points intérieurs et $f(a-) = \sup(f(x), x < a)$, $f(a+) = \inf(f(x), x > a)$, $f(a-) \leq f(a) \leq f(a+)$. Sur les bornes, la limite existe mais est potentiellement infinie

Corollaire 4. Toute suite croissante majorée converge. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Exemple 11. La série harmonique diverge, $(n/e)^n/n!$ converge.

Application 8 (Théorème de convergence monotone). Soit (X, μ) un espace mesuré et f_n une suite croissante de fonctions mesurables qui converge pp vers f . Alors $\int_X f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n$.

Exemple 12. $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = e - 2$

Corollaire 5. [1] Toute fonction croissante est réglée, elle n'admet donc qu'un nombre dénombrable de points de discontinuités (qui sont toutes du premier ordre) et est limite uniforme de fonctions en escalier.

Théorème difficile

Théorème 5 (de Lebesgue). Toute fonction croissante est dérivable pp et vérifie $\int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$.

2.2 Régularité des fonctions convexes

Théorème 6. [1] Toute fonction convexe sur un intervalle ouvert est dérivable à gauche et à droite en tout point, elle est donc continue. De plus les dérivées à gauche et à droite sont croissantes, et on a si $a < b$,

$$f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b).$$

Enfin, f est dérivable sauf en un nombre dénombrable de points.

Remarque 6. *Théorème faux si l'intervalle est pas ouvert.*

Exemple 13. [1] *La fonction nulle sur $(0,1)$ valant 1 en 0 et 1 est convexe mais non continue. $-\sqrt{1-x^2}$ est convexe sur $(-1,1)$ mais non dérivable à droite en -1 , à gauche en 1.*

Corollaire 6. *f définie sur un intervalle I est convexe ssi f est continue, dérivable à droite sur $I \subset D$ et f'_d est croissante sur $I \subset D$.*

Proposition 13. [2] *Toute fonction convexe sur un intervalle I est lipschitzienne sur tout compact.*

Proposition 14. [4] *Toute fonction convexe sur un convexe de $\mathbb{R}^n$ est continue.*

2.3 Stabilité des fonctions monotones

Théorème 7. *Toute limite simple de fonctions croissantes est une fonction croissante. Toute enveloppe supérieure finie de fonctions croissantes est une fonction croissante.*

Exemple 14. *Toute série de fonctions croissantes convergent simplement est croissante.*

Théorème 8 (Théorème de Dini). [1][exo 85] *Toute suite de fonctions croissantes convergeant simplement vers une fonction f continue converge uniformément.*

2.4 Stabilité des fonctions convexes

Théorème 9. [1] *Toute limite simple de fonctions convexes est convexe. De plus la convergence est uniforme sur tout compact. Toute limite supérieure finie de fonctions convexes est convexe.*

Application 9. [6] *La fonction qui a une matrice symétrique réelle de taille n associe sa plus grande vp est convexe.*

Corollaire 7. [1] *f est convexe ssi f est enveloppe supérieure de fonctions affines*

Application 10. [7][Inégalité de Jensen] *Soit $(X, d\mu)$ un espace probabilisé et $f \in L^1(X)$ telle que $a < f(x) < b$. Soit φ une fonction convexe sur (a, b) . Alors $\varphi(\int_{\Omega} f d\mu) \leq \int_{\Omega} \varphi \circ f d\mu$.*

3 Applications

3.1 Théorème des accroissements finis dans un evn

[1]

Lemme 1. *Soit φ une application de I dans un espace métrique et g une application continue croissante de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in \dot{I} \setminus D, \forall \delta > 0, \exists y \in (x, x + \delta) | d(\varphi(y) - \varphi(x)) \leq g(y) - g(x)$. Alors $\forall u < v \in I, d(\varphi(v) - \varphi(u)) \leq g(v) - g(u)$.*

Théorème 10. *Soit φ une fonction continue dérivable à droite en tout point de $I \subset D$ telle que $m \leq \varphi'_d(x) \leq M$. Alors pour $u < v, m(v - u) \leq \varphi(v) - \varphi(u) \leq M(v - u)$.*

Théorème 11 (accroissements finis). *Soit φ une application continue de I dans un evn E dérivable à droite. et g une application continue croissante dérivable de I dans $\mathbb{R}$. On suppose $\|\varphi'_d(x)\| \leq g'_d(x)$. Alors si $u < v, \|\varphi(v) - \varphi(u)\| \leq g(v) - g(u)$.*

Corollaire 8. *Toute fonction continue dérivable à droite de dérivée bornée est lipschitzienne.*

3.2 Fonctions de Liapunov

[10]

Définition 3. *Soit l'EDO suivante: $x' = f(x)$, avec $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne. Supposons par ex que 0 est un équilibre. 0 est dit équilibre stable ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 | x \in B(0, \delta) \Rightarrow$ la solution maximale du pb de Cauchy $x' = f(x)$ et $f(0) = x$ est stable en 0.*

Définition 4. *Une fonction de Liapunov est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ strictement positive sauf en 0 où elle est nulle décroissante le long des trajectoires de l'équa diff.*

Théorème 12. *Il existe une fonction de Liapunov $\Rightarrow$ équilibre stable.*

3.3 Inégalités de convexité

Théorème 13 (Première inégalité de Clarkson). [8]

$$\frac{|a+b|^p}{2} + \frac{|a-b|^p}{2} \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p)$$

Application 11. [8] Les espaces L^p pour $p \in (1, \infty)$ sont uniformément convexes donc réflexifs.

Théorème 14 (Hölder généralisé). Soit E un espace vectoriel de fonctions d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, et $L : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application additive et positivement homogène de degré 1. Alors si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
 $L(fg) \leq L(f^p)^{\frac{1}{p}} L(f^q)^{\frac{1}{q}}$

Corollaire 9. Si $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$, $L(f_1 \dots f_n) \leq L(f_1^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} \dots L(f_n^{p_n})^{\frac{1}{p_n}}$

Application 12. Soit (X, μ) un espace mesuré. Alors $\int_X |f_1 \dots f_n| d\mu \leq (\int_X |f_1|^{p_1} d\mu)^{\frac{1}{p_1}} \dots (\int_X |f_n|^{p_n} d\mu)^{\frac{1}{p_n}}$.

Théorème 15 (Minkovski généralisé). $L((f+g)^p)^{\frac{1}{p}} \leq L(f^p)^{\frac{1}{p}} + L(g^p)^{\frac{1}{p}}$

Application 13. Les L^p sont des evn.

3.4 Optimisation convexe

[6]

Théorème 16. Soit C un ouvert convexe et f une fonction convexe. Alors x est un minimum ssi $df(x) = 0$.

Application 14. [6] Dans le plan ou l'espace, il existe un unique point minimisant la somme des distances à trois points non alignés (point de Fermat).

Proposition 15. Soit C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction convexe. Alors l'ensemble des points réalisant le minimum est un convexe.

Corollaire 10. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction strictement convexe. Alors f admet au plus un minimum.

Application 15 (Lax-Milgram). a forme bilinéaire symétrique continue coercive, et l une forme linéaire continue. Il existe un unique point u tq $a(u, h) = l(h)$ quel que soit h , et ce point minimise la fonctionnelle $1/2a(u, u) - l(u)$.

3.5 Méthode de Newton[10]

Théorème 17. Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On suppose f convexe, et on suppose que f s'annule en un unique point a . Soit $x_0 \in \Omega$. On pose $F(x) := x - df(x)^{-1}(f(x))$. Alors la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers a quadratiquement.

3.6 Fonctions de répartition[7]

Définition 5. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On appelle fonction de répartition la fonction $F(x) = \mu((-\infty, x])$.

Proposition 16. F est croissante, continue à droite, F tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en ∞ .

Théorème 18. Si F est une fonction croissante càd tendant vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en ∞ , il existe une unique mesure de proba telle que $F(x) = \mu((-\infty, x])$.

Developpements: accroissements finis dans un evn, optimisation convexe : CNS + point de Fermat + L-M, méthode de Newton (adaptation de [10])

References

- [1] Choquet topologie
- [2] Zuily-Queffelec
- [3] Ramis analyse
- [4] Gourdon analyse
- [5] fgn analyse 1
- [6] objectif agrégation
- [7] Rudin
- [8] Brezis
- [9] Hauchecorne
- [10] Rouviere