

230. Séries numériques. Comportement des restes ou sommes partielles. Exemples.

Pierre Lissy

December 18, 2009

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Convergence d'une série

1.1 Définition et modes de convergence[3]

Définition 1. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Posons $s_n := \sum_{i=0}^n a_i$, appelée la somme partielle d'indice n . On appelle série de terme général a_n (notée abusivement $\sum_{n \geq 0} a_n$) le couple (a_n, s_n) . La série est dite convergente (on écrira $\sum_{n \geq 0} a_n$ CV) si et seulement si la suite $(s_n)_{n \geq 0}$ converge; sa limite sera appelée somme de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ et sera notée $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$. On appellera reste d'indice n la quantité $\sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i$. Dans le cas contraire, la série est dite divergente ($\sum_{n \geq 0} a_n$ DV). La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est dite absolument convergente si ($\sum_{n \geq 0} a_n$ CVA) et seulement si $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge, et elle est dite commutativement convergente ($\sum_{n \geq 0} a_n$ CVC) si et seulement si $\forall \sigma \in \text{Bij}(\mathbb{N})$, $\sum_{n \geq 0} a_{\sigma(n)}$ converge et ne dépend pas de σ .

Proposition 1. Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. $\sum_{n \geq 0} a_n$ CV $\Leftrightarrow \sum_{n \geq n_0} a_n$ CV.
2. Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ CV et $\sum_{n \geq 0} b_n$ CV (resp. CVA, CVC), alors $\sum_{n \geq 0} (\lambda a_n + \mu b_n)$ CV (resp. CVA, CVC) et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{i=0}^{+\infty} a_i + \mu \sum_{i=0}^{+\infty} b_i$.
3. Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ CV et $\sum_{n \geq 0} b_n$ DV, alors $\sum_{n \geq 0} (\lambda a_n + \mu b_n)$ DV.
4. Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ CV, $a_n \rightarrow 0$, la réciproque étant fautive. Si $a_n \not\rightarrow 0$, on dit que $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge grossièrement ($\sum_{n \geq 0} a_n$ DVG).
5. Si $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$, alors soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ CV, soit $\sum_{k=0}^n a_k \leftarrow +\infty$. Dans ce cas on s'autorise à écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

Exemple 1. 1. $\sum_{n \geq 0} z^n$ CV pour $|z| < 1$, DVG pour $|z| \geq 1$.

2. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ DV (mais pas grossièrement)
3. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ CV (mais pas absolument)
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ CV

1.2 Critère de Cauchy[3]

Définition 2. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum_{n \geq 0} a_n$ vérifie le critère de Cauchy si et seulement si la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy, ie. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} | n \geq m \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \geq \varepsilon$.

Théorème 1. $\sum_{n \geq 0} a_n$ CV $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} a_n$ vérifie le critère de Cauchy.

Corollaire 1. Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ CV, alors pour toute extraction φ , si l'on pose $b_n := \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)} a_k$, alors $\sum_{n \geq 0} b_n$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. Inversément, si φ est telle que $(\varphi(n+1) - \varphi(n))_{n \geq 0}$ est majorée, alors $\sum_{n \geq 0} b_n$ CV $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Exemple 2. A trouver

1.3 Lien entre les modes de convergence[1]

Théorème 2. $\sum_{n \geq 0} a_n$ CVA $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} a_n$ CVC $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n$ CV. De plus, dans la définition de la CVC, l'hypothèse d'indépendance de la somme par rapport à σ est inutile.

Définition 3. Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente (SCV).

Théorème 3. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ est SCV, alors $\forall a \leq b \in \bar{\mathbb{R}}, \exists \sigma \in \text{Bij}(\mathbb{N})$ telle que $(\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)})_{n \geq 0}$ ait pour valeurs d'adhérence $[a, b]$. En particulier $\forall a \in \bar{\mathbb{R}}, \exists \sigma \in \text{Bij}(\mathbb{N})$ telle que $(\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)})_{n \geq 0}$ converge vers a .

1.4 Produit de Cauchy de deux séries[2]

Définition 4. Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle produit de convolution la suite notée $(a_n * b_n)_{n \geq 0}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n * b_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j$. On appelle produit de Cauchy des séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ la série $\sum_{n \geq 0} (a_n * b_n)$.

Théorème 4. Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ CVA et $\sum_{n \geq 0} b_n$ CV, alors $\sum_{n \geq 0} (a_n * b_n)$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n * b_n) = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n)$.

Corollaire 2. Appelons $l_1(\mathbb{K}) = \{\text{Séries à valeurs dans } \mathbb{K} \text{ qui CVA}\}$. Alors $(l_1, +, \cdot, *)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre normée complète d'élément neutre pour $*$ $(1, 0, 0, \dots)$.

Exemple 3. $\sum_{n \geq 0} (\sum_{k=0}^n \frac{e^{in\theta}}{(n+1-k)^{\frac{1}{4}}(k+1)^{\frac{3}{2}}})$ CV si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$.

2 Critères de convergence pour les séries positives

Remarque 1. Dans les critères donnés aux paragraphes 1 à 5, toutes les hypothèses de positivité et toutes les inégalités peuvent être remplacées par des hypothèses de positivité ou des inégalités à partir d'un certain rang.

2.1 Comparaison simple, logarithmique[2]

Proposition 2. Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$. Si $a_n = [n \rightarrow \infty]O(b_n)$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ CV, alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ CV.

Exemple 4. $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n)}{2^n}$ CVA.

Proposition 3. Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{+*\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{+*\mathbb{N}}$. Si $\forall n \geq 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, alors $\sum_{n \geq 0} b_n$ CV $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n$ CV.

2.2 Comparaison avec une intégrale[3]

Théorème 5. Soit $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, positive et décroissante. On pose $(u_n) := (f(n))$. Alors $\sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f < +\infty$.

Exemple 5. $\sum \frac{1}{k^\alpha} \text{ CV}$ si $\alpha > 1$.

2.3 Critère de condensation de Cauchy[2]

Proposition 4. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$ décroissante. Alors $\sum_{n \geq 0} a_n \text{ CV} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n} \text{ CV}$.

Exemple 6. [2] Séries itérées des séries de Bertrand. La série de terme général $\frac{1}{n(\log n)^\beta} \text{ CV}$ si $\beta > 1$. La série de terme général $\frac{1}{n(\log n)(\log(\log n))^\beta} \text{ CV}$ si $\beta > 1$. Et ainsi de suite.

2.4 Règle d'Alembert[2]

Proposition 5. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, alors $\sum a_n \text{ CV}$. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, alors $\sum a_n \text{ DVG}$.

Exemple 7. $\sum (\frac{3}{2^n})n! \text{ CV}$.

2.5 Règle de Cauchy[2]

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} < 1$, alors $\sum a_n \text{ CV}$. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} > 1$ ou $a_n^{\frac{1}{n}} \geq 1$ pour une infinité de valeurs de n , alors $\sum a_n \text{ DVG}$.

Exemple 8. A trouver

3 Critères de convergence pour les séries non nécessairement positives

3.1 Comparaison avec une intégrale[6]

Théorème 6. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 dont la dérivée est L^1 . Alors $\sum_{n \geq 0} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f < +\infty$.

Exemple 9. $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n) \ln(n)}{n} \text{ DV}$.

3.2 Règles d'Abel[2]

Théorème 7. Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Dans chacun des cas suivants, $\sum_{n \geq 0} a_n b_n \text{ CV}$:

1. (a_n) est à variations bornées, $a_n \rightarrow 0$ et b_n est à sommes partielles bornées.

2. $\sum_{n \geq 0} a_n \text{ CV}$, et (b_n) est à variations bornées

3. Il existe une suite λ_n de $\mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$ telle que $a_n \lambda_n \rightarrow 0$, $\sum_{n \geq 0} \lambda_n \text{ CV}$ et $(\frac{\sum_{n \geq 0} a_n}{\lambda_n})$ est bornée.

Exemple 10. $\sum \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}} \text{ CV}$ si $\theta \neq 0[2\pi]$; $\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n} \text{ CV}$.

3.3 Critère spécial pour les séries alternées[7]

Théorème 8. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$ ou $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{-\mathbb{N}}$. On considère la série $\sum (-1)^n a_n$. Cette série est dite alternée. Supposons que $|a_n|$ est décroissante, et $a_n \rightarrow 0$. Alors $\sum (-1)^n a_n$ CV, sa somme est de même signe que le signe de a_0 est $|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k| \leq |a_n|$.

Exemple 11. $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV si et seulement si $\alpha > 0$.

4 Comportement des restes et sommes partielles

4.1 Comparaison des séries positives

On note R une des relations de comparaison suivantes : o , O , $\sim$, θ . Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$ vérifiant $a_n R b_n$.

Théorème 9. 1. Si $\sum a_n$ DV, alors $\sum b_n$ DV et $\sum_{k=1}^n a_n R \sum_{k=1}^n b_n$.

2. Si $\sum b_n$ CV, alors $\sum a_n$ CV et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n R \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_n$.

Exemple 12. 1. Si $\alpha < 1$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}$.

2. Si $\alpha = 1$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

3. Si $\alpha > 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{(\alpha-1)}$.

4.2 Séries définies à partir d'une fonction positive [5]

On considère une fonction g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, positive. On s'intéresse à $\sum_{k \geq 0} g(k)$. On pose $s_n := \sum_{k=0}^n g(k)$, et si $\sum_{k \geq 0} g(k)$ CV, on pose $r_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} g(k)$.

Théorème 10. 1. Si $\frac{g'(x)}{g(x)} \sim \mu \neq 0$, alors

$$(a) \text{ Si } \int g = \infty, s_n \sim \frac{\mu}{1 - e^{-\mu}} \int_0^n g,$$

$$(b) \text{ Si } \int g < \infty, r_n \sim \frac{\mu}{1 - e^{-\mu}} \int_n^{+\infty} g.$$

2. Si $g'(x) = o(g(x))$, alors

$$(a) \text{ Si } \int g = \infty, s_n \sim \mu \int_0^n g,$$

$$(b) \text{ Si } \int g < \infty, r_n \sim \mu \int_n^{+\infty} g.$$

3. Si $g(x) = o(g'(x))$, alors

$$(a) \text{ Si } g \text{ est croissante pour } x \text{ assez grand, } s_n \sim g(n),$$

$$(b) \text{ Si } g \text{ est décroissante pour } x \text{ assez grand, } r_n \sim g(n).$$

Exemple 13. 1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$

2. $\exists A > 0 |n!| = A \sqrt{n} e^{-n} n^n (1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}))$.

4.3 Séries de signe quelconque: échelles de comparaison[2][5]

PARAGRAPHE A REVOIR

Définition 5. On appelle échelle de comparaison un ensemble de fonction réelles $\mathcal{E}$ définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant:

1. Tout élément de $\mathcal{E}$ est > 0 au voisinage de $+\infty$,
2. $1 \in \mathcal{E}$,
3. $f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow fg \in \mathcal{E}$ et $f = o(g) \Leftrightarrow g = o(f)$.

Exemple 14. On prend comme échelle de comparaison les séries de Riemann, les séries de Bertrand et leur itérées.

Théorème 11. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $\exists c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, si $\exists f_1, \dots, f_k \in \mathcal{E}$ tels que $a_n - c_1 f_1(n) - \dots - c_{k-1} f_{k-1}(n) \sim c_k f_k(n)$, alors ces réels et ses fonctions sont uniques et $c_1 f_1(n) + \dots + c_k f_k(n)$ est appelé le développement asymptotique de (a_n) à la précision f_n .

Remarque 2. Ce théorème sert à prouver la convergence de séries de la manière suivante: on développe a_n jusqu'à obtenir un terme $c_p f - p(n)$ positif ou qui CVA.

Exemple 15. $\sum \log(1 + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}})$ CV, alors que $\sum \log(1 + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}})$ DV.

Developpements : Liens entre les modes de convergence [1], réorganisation des termes d'une série semi-CV [2], Produit de Cauchy affaibli + exemple [2]

References

- [1] Schwarz Topologie et analyse fonctionnelle
- [2] Chevallard séries numériques
- [3] Dixmier cours de mathématiques du premier cycle tome 2
- [4] Choquet topologie
- [5] Dieudonné calcul infinitésimal
- [6] Zuily-Queffelec
- [7] Ramis analyse