

234. Espaces L^p

Pierre Lissy

December 20, 2009

Dans tout ce qui suit, $(X, \mathcal{T}, \mu)$ désigne un espace mesuré, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$.

1 Espaces vectoriels normés $L^p(X)$

1.1 Définitions

Définition 1. Soit $p \in [1, \infty)$ et soit $f : x \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On pose $\|f\|_p := (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$. On pose $\mathcal{L}_p(X) := \{f \mid \|f\|_p < \infty\}$.

Définition 2. On pose $\|f\|_\infty = \supess(|f|) = \inf \{C \mid |f(x)| \leq C \text{ pp}\}$. On pose $\mathcal{L}_\infty(X) := \{f \mid \|f\|_\infty < \infty\}$

Proposition 1. Si f est mesurable alors $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p$.

1.2 Structure d'espace vectoriel

Définition 3. Soit $p \in [1, \infty]$. On appelle exposant conjugué de p (noté p' dans toute la suite) le nombre $p' \in [1, \infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1 (Inégalité de Hölder). Soit f et g deux fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_X fg \leq \left(\int_X f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

Corollaire 1. Soit $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$. Alors $fg \in L^r(X)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$

Application 1 (interpolation entre $L^p(X)$). $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$. Alors $f \in L^{\theta p + (1-\theta)q}$ pour tout $\theta \in [0, 1]$.

Théorème 2 (Inégalité de Minkovski). Soit f et g deux fonctions mesurables positives. Alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Corollaire 2. Les espaces $(\mathcal{L}^p(X), \|\cdot\|_p)$ sont des espaces vectoriels semi-normés.

Proposition 2. Soit $f \in \mathcal{L}^p(X)$. Alors $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ pp}$. Soit donc la relation suivante : $fRg \Leftrightarrow \|f - g\|_p = 0 \Leftrightarrow f = g \text{ pp}$. C'est une relation d'équivalence. On pose $L_p(X) = \mathcal{L}_p(X)/R$. On pose $\|Cl(f)\|_p := \|f\|_p$. (qui ne dépend pas du représentant choisi). Alors Les espaces $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ sont des espaces vectoriels normés.

1.3 Complétude des espaces $L^p(X)$

Théorème 3 (Riesz-Fischer). $L^p(X)$ est un espace complet.

1.4 Sous-espace dense de $L^p(X)$

Rappel:

Théorème 4. Toute fonction mesurable positive presque partout est limite croissante de fonctions étagées. Donc l'ensemble des fonction étagées est dense dans l'ensemble des fonctions mesurables.

Théorème 5. Toute fonction de L^p positive presque partout est limite croissante de fonction en escalier (ie étagées nulles sauf sur un ensemble de mesure fini), et donc le sous-espace vectoriel des fonctions en escaliers sont est dans L^p .

Remarque 1. Ce résultat permet de démontrer un grand nombre de propriété au travers de ce qu'on appelle "la machine standard": pour démontrer une propriété P vraie sur une fonction de L^p et "linéaire", on montre d'abord qu'elle est vraie sur les indicatrices, puis sur les combinaisons linéaires positives d'indicatrices, puis sur les fonction L^p positives avec le théorème de convergence monotone puis sur toutes les fonctions L^p en écrivant $f = f^+ - f^-$.

Application 2 (Lemme de Riemann-Lebesgue). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\langle x, \xi \rangle} dx \rightarrow 0$ quand ξ tend vers ∞ .

Application 3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 |mes(A) < \delta \Rightarrow \int_A f \leq \varepsilon$.

1.5 Relations d'inclusions entre espaces $L^p(X)$

Proposition 3. Si μ est une mesure finie, alors $p \leq q \Rightarrow L^p$ s'injecte continûment dans $L^q(X)$.

Remarque 2. Faux même si μ est une mesure de Radon.

Exemple 1. $f : x \mapsto |x|^s 1_{[-1;1]} \in L^p(\mathbb{R})$ ssi $ps > -1$.

$f : x \mapsto |x|^s 1_{[1;\infty)} \in L^p(\mathbb{R})$ ssi $ps < -1$.

2 Dualité, réflexivité

Dans toute cette section μ est une mesure σ -finie.

2.1 $(L^p)' = L^{p'}$

Théorème 6 (Théorème de représentation de Riesz). Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p(X))'$. Alors il existe une unique $g \in L^{p'}(X)$ tel que $\varphi(f) = \int_X fg$. De plus $\|\varphi\|_{(L^p(X))'} = \|g\|_{L^{p'}}$. On identifie donc $(L^p(X))'$ et $L^{p'}(X)$ à l'aide de cette isométrie.

2.2 Réflexivité

Théorème 7. Les espaces $L^p(X)$ sont réflexifs pour $1 < p < \infty$.

On peut donc appliquer aux espaces $L^p(X)$ les théorèmes généraux sur les espaces réflexifs. Notamment,

Application 4. La boule unité de L^p est faiblement compacte. Toute partie bornée (resp fermée bornée) de L^p est faiblement relativement compacte (resp. compacte).

En fait, les espaces $L^p(X)$ vérifient une propriété plus forte.

Définition 4. Un evn est dit uniformément convexe ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x, y, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$, avec $\|x - y\| > \varepsilon$, on a $\frac{x + y}{2} < 1 - \eta$.

Théorème 8. Tout espace uniformément convexe est réflexif.

Proposition 4. Les espaces $L^p(X)$ sont uniformément convexes (avec $1 < p < \infty$).

3 Liens entre les modes de convergence dans les espaces L^p

3.1 Convergence monotone L^p

Théorème 9. Soit f_n une suite croissante positive pp de fonctions tendant vers une fonction f positive pp et L^p . Alors f_n converge vers f en norme L^p .

Application 5. Application convergence monotone

3.2 Lemme de Fatou L^p

Proposition 5 (Lemme de Fatou). Soit f_n une suite positive. Alors $\int_X \liminf f_n \leq \liminf \int_X f_n$.

L'inégalité peut être stricte.

Exemple 2. $f_n = 1/(nx)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Proposition 6 (Lemme de Fatou inversé). Si μ est finie, alors $\int_X \limsup f_n \geq \limsup \int_X f_n$.

Application 6. Application Fatou

3.3 Théorème de convergence dominée et sa réciproque

Théorème 10. Soit f_n une suite de L^p convergent simplement vers une fonction f aussi L^p . On suppose qu'il existe une fonction g positive dans L^p telle que pour tout n , $|f_n| \leq g$. Alors f_n tend vers f dans L^p .

Application 7 (Intégrales à paramètres). soit $f : X \times E$ où E est un espace métrique. On suppose que $f(x, t)$ est mesurable pour tout t , dominée par une fonction g indépendante de $t \in L^1$, et $f(x, \cdot)$ continue pp. Alors $t \mapsto \int_X f(x, t) d\mu$ est continue sur T . Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : X \times \Omega$ une application mesurable pour tout t , intégrable pour tout t , et $f(x, \cdot)$ est de classe C^1 quel que soit x telle que toutes les dérivées partielles soient dominées par une fonction g indépendante de t . Alors $t \mapsto \int_X f(x, t) d\mu$ est de classe C^1 sur Ω et $d(\mapsto \int_X f(x, t) d\mu)(t) =$

Exemple 3. La transformée de Fourier d'une fonction L^1 est continue.

Théorème 11 (Réciproque du théorème de Lebesgue). Soit f_n convergeant vers f dans L^p . Alors il existe une sous-suite $f_{\varphi(n)}$ convergeant presque sûrement vers f et un chapeau intégrable h tq $f_n \leq h$.

3.4 Lemme de Scheffé et lemme de Vitali

Théorème 12 (Lemme de Scheffé). Soit f_n convergeant simplement vers f . Alors f_n converge vers f dans L^1 si et seulement si $\int_X |f_n|$ converge vers $\int_X |f|$.

Définition 5. Soit f_n une suite L^1 . f_n est dit équiintégrable ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f_n| < \varepsilon$ pour tout n .

Théorème 13. f_n une suite équiintégrable qui converge en mesure vers f si et seulement f_n converge vers f dans L_1 .

4 Etude spécifique des $L^p(\Omega)$

4.1 $L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$

Proposition 7. $L^1(\Omega)$ n'est pas réflexif : la suite $1_{B(a, 1/n)}/\mu(B(a, 1/n))$ ne converge pas faiblement.

Théorème 14. Un espace de Banach est réflexif si et seulement si son dual topologique est réflexif.

Corollaire 3. $L^\infty(\Omega)$ n'est pas réflexif.

Proposition 8. $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable: soit $a \in \Omega$ et $r_a < d(a, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Posons $u_a = 1_{B(a, r_a)}$. Alors les voisinages ouverts $O_a = B(u_a, 1/2)$ sont disjoints et en nombre non dénombrable.

Proposition 9. $(L^1)'(\Omega) = L^\infty(\Omega)$ mais $L^{\infty(\Omega)'}$ est strictement inclus dans $L^1(\Omega)$.

Exemple 4. [4] On prolonge par Hahn-Banach la forme linéaire sur $C_c(\Omega)$ définie par $\varphi : f \mapsto f(0)$. On montre que φ ne peut pas être représentée par une fonction L^1 .

4.2 Régularisation par convolution et convergence

4.3 Régularisation par moyenne et convergence

4.4 Densité des fonctions C_0^∞

Théorème 15. Les fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ sont denses dans L^p , pour $p < \infty$.

Remarque 3. Les espaces L^p sont donc les complétions pour les normes $\|\cdot\|_p$ des espaces C_0^∞ , sauf pour L^∞ .

Proposition 10. La complétion pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions essentiellement bornées nulles à l'infini.

Application 8 (Lemme fondamental des variations). Soit $f \in L^p$ telle que pour tout $g \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega fg = 0$. Alors $f = 0$ pp.

Remarque 4. C'est en fait aussi vrai pour les fonctions localement intégrables.

Corollaire 4 (Distributions). On munit $D := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ de la topologie suivante: une base de voisinages d'une fonction test f de support inclus dans un compact K est $\{U_{f,\varepsilon,\alpha} | \varepsilon > 0, \alpha \in \mathbb{N}^k\}$ avec

$$U_{f,\varepsilon,\alpha} = \{g \in D | \text{supp}(G) \subset K, \|D^\alpha(f - g)\|_{\infty,K} < \varepsilon\}$$

. On note D' son dual topologique, que l'on munit de la topologie $*$ -faible, de telle sorte que $T_n \rightarrow T$ dans D' ssi pour tout φ dans C_0^∞ , on a $\langle T_n - T, \varphi \rangle \rightarrow 0$. Une fonction $u \in L^1_{\text{loc}}$ est une distribution : on vérifie que $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi$ est bien continue. Le lemme précédent assure que si $u = v$ au sens des distributions avec v et u localement intégrables alors $u = v$ pp. (c'est donc aussi vrai pour les fonctions L^p qui sont localement intégrables).

5 L'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$

5.1 Structure hilbertienne de L^2

Définition-proposition 1. $(f, g) \mapsto \int_X fg$ est un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ qui fait de L^2 un espace de Hilbert noté H .

On peut donc appliquer à H le théorème de projection sur un convexe fermé ou sur un sous-espace vectoriel fermé.

Théorème 16. L^2 étant séparable, il admet une base hilbertienne

5.2 Coefficients de Fourier

5.3 Transformée de Fourier

Définition-proposition 2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors on définit sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\langle x, \xi \rangle} dx$. C'est une fonction continue tendant vers 0 quand ξ tend vers ∞ . La transformée de Fourier inverse est $\bar{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$.

Théorème 17. Si f est L^1 et que $\mathcal{F}(f)$ est aussi L^1 on a la formule d'inversion de la transformée de Fourier : $\mathcal{F}(f)\bar{\mathcal{F}}(f) = \bar{\mathcal{F}}(f)\mathcal{F}(f) = 2\pi Id$.

En utilisant le théorème de prolongement des applications linéaires., on montre le théorème suivant:

Théorème 18. Si f est $L^1 \cap L^2$ alors $\mathcal{F}(f)$ est dans L^2 et $\|f\|_2 = 2\pi\|\mathcal{F}(f)\|_2$ (Parseval). On peut alors prolonger la transformation de Fourier en une application linéaire de L^2 dans L^2 . La formule de Parseval est toujours valable comme la formule d'inversion, et la transformée de Fourier est un automorphisme de L^2 .

5.4 Extension aux espaces de Sobolev H^s et applications

Définition-proposition 3. Soit $s \geq 0$. On appelle $H^s(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) | \int_{\mathbb{R}^n} ((1+x^2)^s) |\mathcal{F}(f)|^2 dx < \infty\}$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} ((1+x^2)^s) |\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)| dx$.

Remarque 5. H^s est aussi la complétion pour la norme $\|\cdot\|_{H^s}$ de C_0^∞ .

Application 9 (Equation de Schrödinger linéaire et non-linéaire). On s'intéresse à l'EDP suivante (dans $\mathbb{R}^n$ avec $s \geq 0$).

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \in H^s \end{cases} \quad (1)$$

On cherche une solution faible de ce problème, ie on cherche une fonction mesurable u qui vérifie: $\forall \varphi \in S$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}^n} iu_t - \Delta u \varphi dx = 0$. Ce problème admet une unique solution faible notée $S(t)u_0 := e^{-it\Delta}u_0 := \bar{\mathcal{F}}(e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}(u_0)(\xi))$. De plus, $S(t)u_0 \in C^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n))$, et l'égalité de Parseval nous donne $\|S(t)u_0\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}$: le propagateur $S(t)$ conserve l'énergie du système. Soit maintenant le système (avec ici $s > \frac{n}{2}$)

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = P(u, \bar{u}) \in L^2 \\ u(0, \cdot) = u_0 \in H^s \end{cases} \quad (2)$$

où P est un polynôme valant 0 en 0. On montre que u est une solution faible sur le temps $[-T, T]$ si et seulement si $u \in C^0([-T, T], H^s)$ et u vérifie l'égalité de Duhamel $A(u) := S(t)u_0 - i \int_0^t S(t-\sigma)P(u)(\sigma) d\sigma = u$. On montre l'existence d'une solution locale en appliquant un théorème de point fixe de Picard sur l'opérateur A (qui est bien un opérateur sur un espace complet $C^0([-T, T], H^s)$), contractant pour un temps T assez petit.

Developpements: Ascoli + Riesz-Fréchet-Kolmogorov, inversion de la transformée de Fourier, riesz-thorin + young

References

- [1] Schwartz distributions
- [2] Genet +++
- [3] Rudin
- [4] Brezis
- [5] Hauchecorne