

239. Intégrales dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Pierre Lissy

January 6, 2010

1 Définition. régularités.

1.1 Intégrale à paramètre

Définition 1. Soit (E, A, μ) un espace mesuré, (X, d) un espace métrique et $f : E \times X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que pour tout x la fonction $t \mapsto f(t, x)$ soit mesurable et intégrable. On pose $F(x) = \int_E f(t, x) dt$. C'est ce qu'on appelle une intégrale à paramètre.

Exemple 1. On prend pour E les entiers naturels munis de la mesure de comptage. On obtient alors des séries de fonctions.

1.2 continuité pour la convergence absolue

Théorème 1. On suppose que

1. pp en t , $f(t, \cdot)$ est continue en x_0 .
2. Pour tout x , $f(\cdot, x)$ mesurable.
3. $|f(t, x)| \leq g(t)$ avec $g \in L^1$

Alors F est continue en x_0 . Si on suppose que pp $f(t, \cdot)$ est continue alors F est continue.

Exemple 2. On pose $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. Γ est définie est continue sur le demi-plan $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Exemple 3.

Peut être faux sans l'hypothèse de domination.

Exemple 4. $\int_0^\infty x e^{-xt} dt$ pas continue en 0 alors que la limite existe et on peut pas la dominer par une fonction L^1 .

Remarque 1. La continuité sur tout compact entraînant la continuité, il suffit de vérifier la continuité locale dans le cas où X est un espace métrique localement compact.

Exemple 5. $F(t) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car elle l'est sur tout les $[a, +\infty[$.

1.3 Différentiabilité pour la convergence absolue

On se place sur un Banach (ou sur $\mathbb{R}^n$).

Théorème 2. On suppose que

1. pp en t $f(t, \cdot)$ est dérivable en x_0 par rapport à une certaine variable i en x_0 de dérivée partielle $f_i(\cdot, x)$ mesurable pour tout x .
2. Pour tout x , $f(\cdot, x)$ mesurable.
3. $|f_i(t, x)| \leq g(t)$ avec $g \in L^1$

Alors F est dérivable par rapport à la variable i en x_0 et la dérivée partielle en ce point vaut $\int_E f_i(t, x_0) dt$. De plus, si l'on suppose la fonction dérivable (de dérivée partielle continue) par rapport à une variable pour tout t et presque tout x , alors on a F dérivable par rapport à cette variable (de dérivée partielle continue) et la dérivée partielle vaut $\int_E f_i(t, x_0) dt$. Si c'est vrai pour toutes les dérivées partielles la fonction est différentiable et pour tout h $dF(x)(h) = \int_E df(t, x)(h) dt$.

Remarque 2. On étend facilement le théorème aux dérivées d'ordre supérieur.

Faux sans l'hypothèse de domination.

Exemple 6. $F(x) = x^2 \int_0^1 e^{-xt} dt$ pas de classe C^1 alors que dérivable et que f de classe C^1 .

Exemple 7. $F(x) = \int_0^1 e^{-xt} dt$ pas dérivable en 0 alors que l'intégrande l'est.

Théorème faux si on suppose seulement F dérivable pour presque tout (t, x) (il faut que ce soit vrai pour tout t , presque partout en x).

Exemple 8. On considère une fonction g continue strictement positive sur $[0, 1]$. On pose $f(t, x) = 1_{x \leq t} g(x)$. Alors $F(t) = \int_0^t g(x) dx$. F est dérivable de dérivée g . Mais $f(t, x)$ est dérivable pour presque tout (t, x) (sauf si $t=x$) et de dérivée nulle. Pb...

Exemple 9. La fonction Γ définie précédemment est de classe C^1 et même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exemple 10. $F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t+x^2}$ de classe C^∞ sur tout compact inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ donc de classe C^∞ sur cet intervalle. De plus, on arrive en exprimant ce que sont les dérivées de cette fonction et en utilisant un changement de variable calculer pour tout n la valeur de $I_n = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+x^2)^n}$.

On se sert souvent de ce théorème pour montrer que l'intégrale à paramètre vérifie une certaine équation différentielle et est donc nécessairement égale à une fonction mieux connue.

Exemple 11. [3] $I(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt = \arctan(x)$. $J(x) = \int_0^\infty e^{-t} e^{ixt} T^{\alpha-1} dt = \Gamma(\alpha)(x^2+1)^{-\alpha/2} e^{i\alpha \arctan(x)}$.

Exemple 12. [8][page 350] $F(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} dx$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée vaut $\int_0^\infty e^{-xt} = \frac{1}{t}$. Donc la fonction de départ est $-\log(t)$.

1.4 Holomorphie pour la convergence absolue

Théorème 3. On suppose que

pp en t , $f(t, \cdot)$ est holomorphe sur Ω .

Pour tout x , $f(\cdot, x)$ mesurable

$|f(t, x)| \leq g(t)$ avec $g \in L^1$ Alors F est holomorphe sur Ω et $f_z(z) = \int_E f_z(t, x) dt$.

Exemple 13. Γ est holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re}(Z) > 0$.

Exemple 14 (produit de Hurwitz). [10][page 63] On suppose F et G holomorphes en dehors d'un disque. On définit pour p assez grand $F * G(p) = \int_\gamma F(p-q)g(q) dq$ où γ est un cercle de centre assez grand. On montre que tous les choix assez grands de cercles donnent la même fonction $F * G$. Cette fonction est holomorphe. De plus, si on effectue le développement en série de Laurent de F (coef a_n) et G (coef b_n) alors celui de $F * G$ est $\sum c_n^k a_k b_{n-k}$.

1.5 Cas des intégrales semi-convergentes sur un intervalle

Dans le cas des intégrales semi-convergentes, le théorème de convergence dominée ne marche pas et toutes les démonstrations précédentes ne sont plus valables. On peut par contre énoncer d'autres théorèmes.

Théorème 4. [8] Pour tout compact K de E , $\int_a^X f(t, x) dx$ converge vers $F(t)$ lorsque X tend vers b , uniformément par rapport à t sur K . Alors F est continue sur E .

Exemple 15. On s'intéresse à l'intégrale à paramètre $G(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x} dx$. On montre que f est continue sur $[0, \infty[$ et C^1 sur $]0, \infty[$ en montrant pour la continuité l'uniformité de convergence à l'aide d'une égalité de la moyenne et d'exprimer sa dérivée. Ceci permet de calculer facilement la valeur de l'intégrale semi-convergente $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Exemple 16. $F(t) = \int_1^\infty e^{itx^2} f(x) dx$ avec f positive décroissante. Cette fonction est définie et de classe C^0 sur $]0, \infty[$.

Théorème 5. Pour tout (t, x) la dérivée partielle en x existe et est continue, pour tout t l'intégrale $\int_a^b f'(x, t) dx$ est convergente, et on a convergence uniformément sur tout compact. Alors la fonction est C^1 et $F'(t) = \int_a^b f'(x, t) dx$. Idem holomorphie.

Exemple 17. [10] $F(a) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}$ est holomorphe sur le demi-plan ouvert des $\operatorname{Re}(z) > 0$, continue sur le demi-plan épointé, car on a convergence uniforme sur l'ensemble des $|a| \geq \varepsilon$ et $\operatorname{Re}(a) > 0$.

2 Produit de convolution et transformée de Fourier

2.1 Produit de convolution

2.2 Approximation par convolution

2.3 Transformée de Fourier

2.4 Extension de la transformée de Fourier à L^2

3 Autres applications

3.1 Égalité de Duhamel pour les EDP et les EDO

3.2 Analyse complexe

Proposition 1 (formules de Cauchy). *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω simplement connexe et γ un contour intérieur à cet ouvert. On a alors*

$$I(\gamma, z_0)f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}$$

Corollaire 1. *Toute fonction holomorphe est DSE en tout point de rayon de convergence au moins égal au sup des rayons tq c'est inclus dans l'ouvert*

Application 1. *Toute fonction entière bornée est constante*

Proposition 2 (Morera). *Une fonction est holomorphe ssi son intégrale sur tout triangle est nulle*

Proposition 3. $|f(n)(a)| \leq \frac{n! \|f\|_{\infty, C(a, R)}}{R^n}$ si f est holomorphe sur un ouvert Ω et un disque $D(a, R)$ inclus dans Ω .

Application 2. Si $|f(z)| \leq a + bz^k$ alors z est un polynôme de degré au plus k .

3.3 Intégrale d'une intégrale à paramètre: théorème de Fubini

On se donne deux espaces mesurés (E, A, μ) et (F, B, ν) munis de mesures supposées σ -finies. On se donne une fonction $f : E \times F \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable. On appelle $F(t) = \int_F f(t, x) d\nu$ et $G(x) = \int_E f(t, x) d\mu$

Théorème 6 (Fubini-Tonelli). *Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ alors les fonctions F et G sont définies et mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. De plus on a l'égalité (éventuellement tout ceci diverge)*

$$\int_E F(t) d\mu = \int_F G(x) d\nu = \int_{E \times F} f(t, x) d\mu \times d\nu$$

Théorème 7 (Fubini-Lebesgue). *On suppose f intégrable pour la mesure produit. Alors les fonctions F et G sont définies et mesurables, L^1 presque partout, et on a*

$$\int_E F(t) d\mu = \int_F G(x) d\nu = \int_{E \times F} f(t, x) d\mu \times d\nu$$

Faux si les mesures sont pas σ -finies.

Exemple 18. $E = \mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. $F = \mathbb{R}$ muni de la mesure de comptage. $f(x, t) = 1_{x=t}$. $F(x) = x$ donc $\int F = \infty$. $G(t) = 0$ donc $\int G = 0$.

Faux si la fonction pas L^1 , on peut avoir les intégrales qui existent et pas égales.

Exemple 19. $f(x, t) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ sur $[0, 1]^2$, $f(0, 0) = 0$. $\int_0^1 F = \frac{\pi}{4}$ alors que $\int_0^1 G = \frac{-\pi}{4}$.

Si f n'est pas L^1 on peut quand même avoir des intégrales de F et G qui existent (semi-convergence) et égales.

Exemple 20. $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$. f définie sur $[-1, 1]^2$. F et G sont nulles (on intègre des fonctions impaires) mais f n'est pas L^1 .

References

- [1] Schwartz topologie
- [2] Genet +++
- [3] Gourdon analyse
- [4] Gourdon algèbre
- [5] Brezis
- [6] Hauchecorne
- [7] Choquet
- [8] Zuily-queffelec
- [9] Rouviere
- [10] Exercices fonctions analytiques.