

241: suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

Pierre Lissy

January 13, 2010

1 Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonction

1.1 CVS[1], CVS pp

Définition 1. Soit X un ensemble et (F, d) un espace métrique. On considère une suite de fonctions f_n ou une série de fonctions $\sum f_k$. On dit que cette série ou suite CVS ssi pour tout x la suite $f_n(x)$ ou la série $\sum f_k(x)$ converge. CVS pp: comme son nom l'indique CVS sauf sur un ensemble de mesure nulle.

Exemple 1. La suite de fonctions $\sin(nx)$ CVS vers la fonction valant 1 sur les $k\pi$. La série de fonctions $\sum e^{-nx}$ CVS vers la fonction $\frac{1}{1-e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}+*$.

Proposition 1. Notion stable par linéarité, passage au produit, quotient...

1.2 CVA

Définition 2. La série de fonctions $\sum f_k$ CVA ssi la série $\sum |f_k|$ CVS.

Exemple 2. la série de fonctions $\sum (-1)^n x^n$ CVA sur $(-1, 1)$

Proposition 2. CVA + E complet $\rightarrow$ CVS.

Faux en général si l'espace n'est pas complet. En fait on a même

Théorème 1. Un espace est complet ssi toute série qui CVA y est CV.

Pas évident d'exhiber un contre-exemple précis... Par contre, même si E complet toute suite de fonction qui CVS ne CVA pas forcément.

Exemple 3. $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ CVS sur $[0, 1]$ mais pas CVA.

Proposition 3. Notion stable par linéarité, passage au produit, quotient...

1.3 CVU

Définition 3. Une suite ou une série de fonctions CVU ssi la norme infinie tend vers 0.

Proposition 4. CVU $\Rightarrow$ CVS

Réciproque fausse.

Exemple 4. $\sum e^{-nx}$ CVS mais pas CVU. $(\frac{1}{1+(x-n^2)})$ CVS vers 0 mais pas CVU.

Proposition 5. $\sum f_k$ CVU $\Rightarrow f_k$ CVU fers 0.

Une série de fonctions qui CVS donc chaque terme CVU vers 0 n'est pas nécessairement CVU.

Exemple 5. $\sum \frac{e^{-nx}}{n}$ CVS, ne CVU pas (déjà vu) mais chaque terme CVU vers 0.

On peut remonter de la CVS à la CVU dans certains cas.

Théorème 2 (Dini). [1] Soit X un espace topologique compact et f_n une suite d'applications continues de X dans E métrique. Si on suppose que la suite des distances $d(f(x), f_n(x))$ est décroissante et tend vers 0 alors f_n CVU vers f .

Toutes les hypothèses sont importantes.

Exemple 6. X pas compact: $\frac{1}{nx}$.

Exemple 7. Distance pas décroissante: fonction triangle valant 0 en 0 et $2/n$, valant $(n+1)/n$ en $1/n$.

Exemple 8. pas continues: on numérote les éléments de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ par une suite r_k . On considère la suite de fonctions : aux irrationnels et rationnels inférieurs à n on associe 0, aux autres on associe 1.

On a deux autres théorèmes de Dini.

Théorème 3 (Dini étendu). [1] On considère X compact et une suite croissante de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui CVS vers une fonction CONTINUE, elle CVU. On considère $X = [0, 1]$ et une suite de fonctions croissantes qui cvs vers une fonction CONTINUE. Alors elle CVU.

Faux si des hypothèses manquent.

Exemple 9. Suite de fonctions croissantes de fonctions qui CVS vers une fonction pas continue: x^n . CVS vers 0, pas de CVU.

Proposition 6. CVU stable par somme. Attention pas stable par produit.

Exemple 10. Hauchecorne encore.

1.4 CVN

Définition 4. Une série de fonctions CVN ssi la série des normes infinies CV.

Proposition 7. E complet et $\sum f_k$ CVN $\Rightarrow \sum f_n$ CVU.

Faux si E pas complet, d'ailleurs on montre

Théorème 4. Un espace tel que toute série de fonctions à valeurs dans E qui CVN est aussi CVU est complet.

Mais pareil, contre exemple pas facile à exhiber. Dans le cas général,

Proposition 8. CVN $\Rightarrow$ CVA.

Réciproque fausse.

Exemple 11. $\sum e^{-nx}$ positive CVS donc CVA mais pas CVU donc pas CVN car $\mathbb{R}$ complet.

Dans un espace complet, toute suite CVU n'est pas nécessairement CVN.

Exemple 12. $\sum \frac{(-1)^{nx^n}}{n}$ CVU vers 0 (critère séries alternées) mais pas CVN.

1.5 CV L^p

Définition 5. Une suite ou série de fonction converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f ssi la suite ou série de la différence en norme L^p tend vers 0.

Théorème 5. Soit f_n une suite croissante positive pp de fonctions tendant vers une fonction f positive pp et L^p . Alors f_n converge vers f en norme L^p .

Attention: dans le cas général ce n'est pas parce que $\|f_n\|_{L^p}$ CV qu'on a CV L^p .

Exemple 13. Va falloir trouver

Mais on a la réciproque importante suivante.

Théorème 6 (Lemme de Scheffé). Soit f_n convergeant simplement vers f . Alors f_n converge vers f dans L^1 si et seulement si $\int_X |f_n|$ converge vers $\int_X |f|$.

Définition 6. [3] Soit f_n une suite L^1 . f_n est dit équiintégrable ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f_n| < \varepsilon$ pour tout n .

Proposition 9. Une suite équiintégrable dans L^1 est bornée.

Réciproque fausse.

Exemple 14. $n1_{0,1/n}$.

Une suite équiintégrable n'est pas forcément convergente dans $\mathbb{L}^1$.

Exemple 15.

Théorème 7 (Vitali). [3] f_n une suite est équiintégrable et convergente en mesure vers f si et seulement si f_n converge vers f dans L_1 .

Théorème 8 (Lebesgue). Soit f_n une suite de L^p convergent simplement vers une fonction f aussi L^p . On suppose qu'il existe une fonction g positive dans L^p telle que pour tout n , $|f_n| \leq g$. Alors f_n tend vers f dans L^p .

Exemple 16. [4][page 143]. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \log x dx = \gamma 0$

Faux sans la domination.

Exemple 17. Fonction triangle d'intégrale constante

La convergence uniforme n'est pas non plus suffisante.

Exemple 18. Fonction triangle d'intégrale 1 se déplaçant du Hauchecorne.

En général CV L^p implique pas CVS.

Exemple 19. Exemple page 247 Hauchecorne

Mais on a quand même une réciproque partielle.

Théorème 9 (Réciproque du théorème de Lebesgue). Soit f_n convergeant vers f dans L^p . Alors il existe une sous-suite $f_{\varphi(n)}$ convergeant presque sûrement vers f et un chapeau intégrable h tq $f_n \leq h$.

1.6 CV faible

2 Continuité, dérivabilité

3 Applications

3.1 Intégrales à paramètres

En utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, on obtient des théorèmes sur les intégrales à paramètres.

Application 1 (Intégrales à paramètres). *soit $f : X \times E$ où E est un espace métrique. On suppose que $f(x, t)$ est mesurable pour tout t , dominée par une fonction g indépendante de t L^1 , et $f(x, \cdot)$ continue pp. Alors $t \mapsto \int_X f(x, t) d\mu$ est continue sur T . Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : X \times \Omega$ une application mesurable pour tout t , intégrable pour tout t , et $f(x, \cdot)$ est de classe C^1 quel que soit x telle que toutes les dérivées partielles soient dominées par une fonction g indépendante de t . Alors $t \mapsto \int_X f(x, t) d\mu$ est de classe C^1 sur Ω et $d(\mapsto \int_X f(x, t) d\mu)(t) =$*

Exemple 20. *La transformée de Fourier d'une fonction L^1 est continue.*

Developpements: les 3 Dini + contre-exemples.

References

- [1] Choquet
- [2] Hauchecorne
- [3] Probability with martingales
- [4] Mesure et intégration cours