

Dans toute la suite, le polynôme trigonométrique e^{int} sera noté e_n . On pose T le tore $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications

Pierre Lissy

June 6, 2010

1 Définitions. Théorie L^2 ; Noyaux

1.1 coefficients de Fourier

Définition 1. n -ième coefficient de Fourier d'une fonction de $L^1(T)$: $c_n(f) = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} f(x) \bar{e}_n(x) dx$.

Lemme 1. Riemann-Lebesgue $c_n(f) \rightarrow 0$. L'ensemble des coefficients de Fourier est noté $\widehat{f}$.

Définition 2. On appelle série de Fourier la série suivante: $\sum c_n e_n$. Sa somme partielle est notée S_N .

Proposition 1. 1. $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$.

2. $c_n(f(-t)) = c_{-n}(f)$

3. $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$

4. $c_n(f(\cdot + a)) = e^{ina} c_n(f)$

5. $c_n(f(\cdot - a)) = e^{-ina} c_n(f)$

6. $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$

7. $f * e_n = c_n(f) e_n$

8. Si f est de classe C^1 par morceaux on a $c_n(f') = i n c_n(f)$.

9. Si une série trigo $\sum a_n e_n$ cvu vers f , alors $c_n(f) = a_n$ et f continue.

Proposition 2 (trivialisation du produit de convolution). Si $f \in L^1$ et $g \in L^1$ alors $f * g \in L^1$ et on démontre que $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$. Donc l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est un morphisme d'algèbres, continu et de norme 1. (on munit les suites de la norme infini)

La question principale est: peut-on reconstituer une fonction à partir de ses coefficients de Fourier et en quel sens?

1.2 Théorie L^2

Grâce au théorème de Weierstrass

Théorème 1. Les polynômes e_n forment une base hilbertienne de $L^2(T)$

Corollaire 1. Au sens L^2 , on a $f = \sum (e_n, f) e_n = \sum c_n e_n$. De plus, $\|f\|_2 = \sum_0^\infty |c_n(f)|^2$. On a l'inégalité de Bessel $\|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - p\|$ pour tout polynôme $p \in P_N$.

Théorème 2 (Carleson). $S_N(f)(x) \rightarrow f$ presque sûrement.

Citons des applications du théorème de Parseval.

Application 1. On considère une application de classe C^1 et 2π périodique d'intégrale nulle. Alors $\|f\|_2 \leq \|f'\|_2$ avec égalité ssi $f \in \text{Vect}(e^{it}, e^{-it})$.

Application 2. $4 \sum_{k=1}^\infty \rho_n^2 \sin^2(nh) = 1/(2\pi) \int_{-\pi}^\pi |f(x+h) - f(x-h)|^2$.

Application 3. Calcul de $\sum 1/k^2$ et plus généralement de $\sum 1/k^{2n}$.

Application 4. Inégalité de Hilbert: $\sum a_k a_l / (k+l+1) \leq \sum a_k^2$ (sommes finies). Plus généralement, $|\sum a_k a_l / (k+l+1)|^2 \leq \pi^2 \sum a_k^2 \sum b_k^2$

1.3 Cas de reconstitution et applications

Théorème 3. *on considère une fonction f continue de classe C^1 par morceaux. Elle est somme de sa série de Fourier.*

Application 5. $\sum_{n=1}^{\infty} 2u/(u^2 - n^2) = \pi \cotan(\pi u) - 1/u.$

Application 6. *Calcul d'intégrales $I_n = \int_0^{2\pi} \cos(nx)/(ch(a) - \sin(x))dx$ et $J_n = \int_0^{2\pi} \sin(nx)/(ch(a) - \sin(x))dx$.*

2 Utilisation des noyaux trigonométriques

References

[1]