

Théorème des trois droites d'Hadamard (page 33 poly Desvilletes)

Pierre Lissy

March 23, 2010

On pose $F(z) = p^z e^{\varepsilon z^2} f(z)$ où p et ε sont des paramètres strictement positifs. Notons $z = \theta + iy$. Alors $|F(z)| \leq p^\theta e^{\varepsilon \theta^2} e^{-\varepsilon y^2} |f(z)| \leq \max(1, p) e^{\varepsilon(1-y^2)} \|f\|_\infty$. Donc la limite supérieure de F en l'infini est 0. Ainsi d'après le second principe du maximum, on a que $|F|$ est bornée par le max de ses valeurs sur les bords. Mais si $\theta = 0$, on a $|F(z)| \leq |f(z)| \leq M_0$ et si $\theta = 1$, on a $|F(z)| \leq |f(z)| e^\varepsilon p$. Donc $|f(z)| \leq p^{-\theta} e^{-\varepsilon z^2} \max(M_0, M_1 p e^\varepsilon)$. On fait tendre ε vers 0: $|f(z)| \leq p^{-\theta} \max(M_0, M_1 p)$, et on optimise en p , en prenant p tel que les deux membres soient égaux, c'est-à-dire $p = M_0/M_1$, et on obtient le résultat voulu: $|f(z)| \leq M_0^\theta M_1^{1-\theta}$.

References

[1]