

Pierre Lissy

April 29, 2010

Etude détaillée du groupe A_4 . A_4 est un groupe d'ordre 12 dont les éléments sont de trois types: L'identité, les 3-cycles et les doubles transpositions. Pour les 3-cycles, il y en a huit différents. En effet, on commence par choisir l'élément qui ne bouge pas (4 choix possibles) et alors on n'a plus que deux cycles possibles distincts sur les éléments restant. Il y a donc 3 doubles transpositions.

Etudions les classes de conjugaison et les centralisateurs de ses éléments. L'identité a une classe de conjugaison triviale et centralise tous les éléments.

Les doubles transpositions forment une classe de conjugaisons. En effet, par exemple $(1\ 3\ 2)(1\ 2)(3\ 4)$ envoie 1 sur 3, 2 sur 4, 3 sur 1 et 4 sur 2, donc vaut $(1\ 3)(2\ 4)$. De même $(1\ 4\ 2)(1\ 2)(3\ 4)$ vaut $(1\ 4)(2\ 3)$. D'après la formule des classes, le centralisateur d'une double transposition est de cardinal 4. Mais on remarque qu'en fait toutes les doubles transpositions stabilisent toute autre double transposition: $(a\ c)(b\ d)$ envoie a sur b , b sur a , c sur d et d sur c , idem pour $(a\ d)(b\ c)$. Ainsi, le stabilisateur est le groupe engendré par les doubles transpositions noté V_4 .

Les 3-cycles ne peuvent former une classe de conjugaison, sinon par la formule des classes on aurait 8 divisé 12. Montrons qu'il forment deux classes de conjugaison. $(a\ b)(c\ d)$ envoie a sur b , b sur a , c sur d et d sur c , donc $(1\ 2\ 3)$ et $(2\ 1\ 4)$ sont conjugués, puis $(1\ 4\ 2)$ et $(4\ 1\ 3)$ sont conjugués, et enfin $(3\ 4\ 1)$ et $(4\ 3\ 2)$. Par transitivité, on a $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 4\ 2)$, $(4\ 1\ 3)$ et $(4\ 3\ 2)$ qui sont conjugués, de même on aurait $(1\ 3\ 2)$, $(1\ 2\ 4)$, $(1\ 4\ 3)$ et $(2\ 3\ 4)$ qui sont conjugués. Les classes de conjugaison sont du coup de cardinal 3, mais si on se donne un cycle $(a\ b\ c)$, on connaît déjà 3 éléments qui le centralisent, à savoir les éléments du groupe engendré. Le centralisateur de (abc) est $\langle a, b, c \rangle$.

On s'intéresse aux sous-groupes de A_4 . Si l'on excepte A_4 et le groupe trivial, un sous-groupe est nécessairement de cardinal 2, 3, 4, 6. U

Un groupe de cardinal 2 contient un élément d'ordre 2 et ne peut être que le groupe engendré par une double transposition. Il y a 3 tels sous-groupes. Comme deux doubles transpositions sont conjuguées, tous les sous-groupes sont conjugués. Par la formule des classes, le cardinal du normalisateur est $12/3=4$, donc comme on verra après que le seul sous-groupe d'ordre 4 est V_4 , le normalisateur est V_4 .

Un groupe d'ordre 3 ne peut être que le groupe engendré par un 3-cycle. Il y a 4 tels sous-groupes. Tous les sous-groupes sont conjugués. En effet, d'après la remarque ci-dessous, un 3-cycle et son inverse ne sont pas dans la même classe de conjugaison, donc dans si l'on se donne deux groupes d'ordre 3 ils admettent un deux générateurs conjugués et ils sont donc conjugués. Du coup, le cardinal du normalisateur est $12/4 = 3$, donc le normalisateur est le groupe lui-même.

Montrons qu'il n'existe pas de groupes d'ordre 6. Un tel groupe contiendrait nécessairement un 3-cycle et une double transposition. Mais un sous-groupe d'indice 2 étant toujours distingué, il serait réunion de ses classes de conjugaison, ce qui n'est pas possible car elles sont de cardinal 1, 3, 4. Enfin, il reste à voir si'il y a d'autres sous-groupes d'ordre 4 que V_4 . Mais c'est clair que non car un sous-groupe d'ordre 4 pas égal V_4 contiendrait un trois-cycle, ce qui est interdit par le théorème de Lagrange.

References

[1]