

# SimPLICITÉ de $A_n$ (Page du Lang)

Pierre Lissy

March 22, 2010

D'abord,  $A_3$  est simple puisqu'il est cyclique de cardinal premier.  $A_4$  n'est pas simple: le groupe des doubles transpositions est un sous-groupe distingué. Nous supposons donc dorénavant  $n \geq 5$ . Soit  $N$  un sous-groupe distingué non trivial de  $A_n$ . Si l'on montre que  $N$  contient un 3-cycle, alors comme  $n \geq 5$ , et que les 3-cycles sont tous conjugués,  $G$  contiendra tous les 3 cycles et donc comme les 3-cycles engendrent  $A_n$ ,  $N$  sera égal à  $A_n$  et on a bien obtenu la simplicité. On considère  $\sigma \in N$  admettant un nombre maximal de points fixes, mais différent de l'identité. Montrons que c'est nécessairement un 3-cycle. On décompose  $\{1, \dots, n\}$  en orbites sous l'action de  $\langle \sigma \rangle$ . Certaines orbites sont de cardinal supérieur à 1. Supposons toutes les orbites de cardinal 2 (sauf les points fixes). Comme  $\sigma$  est paire, il existe au moins deux telles orbites, qui donnent deux transpositions  $(i, j)$  et  $(r, s)$ . Soit  $k$  qui est différent de ces points (ce qui est possible puisque  $n \geq 5$ ). On pose  $\tau := (r, s, k)$ . Comme  $N$  est distingué le commutateur  $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \in N$ . Or  $\sigma'$  laisse  $i, j$  et tout élément fixe pour  $\sigma$  (hormis  $k$ ) l'est encore pour  $\sigma'$ . En effet,  $\sigma'(i) = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}(i) = \tau\sigma\tau^{-1}(j) = \tau\sigma(j) = \tau(i) = i$ , de même pour  $j$ , et pour les autres points c'est clair. Donc  $\sigma'$  a strictement plus de points fixe, pas possible. Donc une des orbites au moins est de cardinal au moins 3, contenant par exemple  $i, j, k$ . Si  $\sigma$  n'est pas un 3-cycle de support  $i, j, k$ ,  $\sigma$  déplace au moins deux autres éléments (car  $\sigma$  est paire), notés  $r$  et  $s$ . On considère  $\tau = (k, r, s)$  et  $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \in N$ .  $i$  est fixé par  $\sigma'$ :  $\sigma'(i) = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}(i) = \tau\sigma\sigma^{-1}(i)\tau(i) = i$  et tout point fixe pour  $\sigma$  l'est aussi pour  $\sigma'$ , contradiction. Donc  $\sigma$  est un 3-cycle.

## References

[1]