

Application ouverte et graphe fermé

Pierre Lissy

June 1, 2010

On démontre le théorème de l'application ouverte à partir du lemme de Baire. On considère les fermés suivants: $F_n = \overline{B(0, n)}$. Comme l'application T est surjective l'union des F_n donne F tout entier et donc l'union est d'intérieur non vide, ce qui implique qu'un des F_{n_0} est d'intérieur non vide, contenant $B(x, C)$. On a alors $B(0, C) \subset F_{2n_0}$. En effet, si $y \in B(x, C)$, y est limite de $T(y_n)$ avec les y_n dans $B(0, n)$, de même x est limite de $T(x_n)$ avec les x_n dans $B(0, n)$, donc $x - y$ est limite de $T(x_n - y_n)$, qui appartient bien à $T(F_{2n_0})$ puisque $x_n - y_n \in F_{2n_0}$. Or $B(x, C) - x = B(0, C)$ et on a le résultat.

$B(0, C) \subset 2n_0 \overline{T(B(0, 1))}$, ie $B(x, C/2n_0) \subset \overline{T(B(0, 1))}$. Posons $2D = C/2n_0$, alors $B(0, 2D) \subset \overline{T(B(0, 1))}$.

On va montrer qu'en fait $B(0, D) \subset T(B(0, 1))$. Soit $y \in B(0, D)$. Alors $2y \in \overline{T(B(0, 1))}$ donc il existe un certain $\|x_1\| \leq 1$ tel que $\|2y - Tx_1\| \leq C$. En posant $z_1 = x_1/2$ on a $\|z_1\| \leq 1/2$ et $\|y - Tz_1\| \leq C/2$. Supposons qu'on est construit par récurrence une suite d'éléments z_i avec $i \leq n$ tels que $\|z_i\| \leq 2^{-i}$ et $\|y - Tz_1 - \dots - Tz_n\| \leq C2^{-i}$. On a alors notamment que $\|2^n y - T(2^n z_1) - \dots - T(2^n z_n)\| \leq C$ donc il existe un certain $\|x_{n+1}\| \leq 1$ tel que $\|2^n y - T(2^n z_1) - \dots - T(2^n z_n) - Tx_{n+1}\| \leq C/2$. Donc en posant $z_{n+1} = x_{n+1}/2^n$ on a $\|z_{n+1}\| \leq 2^{-n-1}$ et $\|y - \dots - Tz_{n+1}\| \leq C2^{-n-1}$. Du coup on peut s'intéresser à la série des z_n qui converge vers z et on a que $y = Tz$.

Corollaire 1. *Toute application linéaire continue bijective est un isomorphisme.*

Proof. Il suffit de montrer que l'image réciproque par T^{-1} de tout ouvert est un ouvert, donc que l'image directe de tout ouvert est un ouvert, mais tout ouvert contient une certaine boule $B(x, r) = x + rB(0, 1)$, mais $T(B(x, r)) = T(x) + rT(B(0, 1))$ mais $T(B(0, 1))$ contient une boule $B(0, C)$ et donc $B(T(x), rC) \subset T(B(x, r))$ et donc contient une boule ouverte donc un ouvert. $\square$

Corollaire 2. *On considère un espace E muni de deux normes N et M qui le rendent complets et tel que $N \leq CM$. Alors N et M sont équivalentes.*

Proof. C'est immédiat avec le théorème précédent, l'application $Id : (E, M)$ vers (E, N) est linéaire continue (par l'inégalité de norme) bijective entre deux Banach, c'est donc un isomorphisme ce qui signifie que $Id : (E, N)$ vers (E, M) est continue et il existe une constante C' telle que $M \leq C'N$ et donc les deux normes sont équivalentes. $\square$

Corollaire 3. *Théorème du graphe fermé. On suppose le graphe fermé alors T est continue.*

Proof. On considère E muni de la norme $\|\cdot\|$ et E muni de la norme $\|\cdot\| + \|T\cdot\|$. La deuxième est plus fine que la première, pour montrer qu'elles sont équivalentes il suffit de montrer que E muni de la norme du graphe est un Banach. On considère une suite de Cauchy pour cette norme. $n, m \geq N$ implique que $\|x_n - x_m\| + \|T(x_n - x_m)\| \leq \varepsilon$. A fortiori la suite est de Cauchy pour $\|\cdot\|$ donc $x_n \rightarrow x$. Mais la suite Tx_n étant de Cauchy elle converge vers un certain y . Le graphe étant fermé on a nécessairement que $y = Tx$ et donc on a convergence de x_n pour la norme du graphe vers x . Ainsi il existe une certaine constante C telle que $\|x\| + \|Tx\| \leq C\|x\|$ et donc $\|Tx\| \leq (C - 1)\|x\|$ et donc T est continue. $\square$