

Ascoli-Arzelà (poly Fabre)

Pierre Lissy

March 23, 2010

Lemme 1. *Soit K un espace métrique compact. Alors il est séparable.*

Proof. Soit $\varepsilon > 0$. On considère l'ensemble des boules de centre $x \in K$ et de rayon ε . C'est un recouvrement ouvert de K , on peut en extraire un recouvrement fini $B(x_k, \varepsilon)$, pour $k \in [1, n(\varepsilon)]$. Notamment pour $\varepsilon = 1/n$ on a existence de $x_{n,k}$ tels que les $B(x_{n,k}, 1/n)$ recouvrent K . L'ensemble dénombrable des $x_{n,k}$ est une sous-suite dense. $\square$

Considérons donc une suite dense x_k . On considère $f_n \in C^0(K, E)$ où E est un espace métrique complet telle que l'ensemble des f_n est équicontinu est que l'ensemble $(f_n(x))$ pour n variant est relativement compact. On va déjà construire notre limite éventuelle f sur les x_k par extraction diagonale. On considère la suite $f_n(x_1)$. On en extrait une sous-suite convergente (car on a un ensemble relativement compact) $f_{\varphi_1(n)}(x_1) \rightarrow ff(x_1)$ dans E . On considère la suite $f_{\varphi_1(n)}(x_2)$. On en extrait une sous-suite convergente $f_{\varphi_1\varphi_2(n)}(x_2) \rightarrow f(x_2)$ dans E . Supposons construit k extractions φ_k , telles que $f_{\varphi_1\ldots\varphi_k(n)}(x_k) \rightarrow f(x_k)$. On considère alors $f_{\varphi_1\ldots\varphi_k(n)}(x_{k+1})$. On en extrait une sous-suite convergente $f_{\varphi_1\ldots\varphi_k(n)}(x_{k+1}) \rightarrow f(x_{k+1})$. Considérons maintenant l'extraction $\varphi : n \mapsto \varphi_1 \ldots \varphi_n(n)$. On vérifie facilement que $g(n) := f_{\varphi(n)}(x_k) \rightarrow f(x_k)$. En effet, dès que $n \geq k$, on a $f_{\varphi(n)}(x_k) = f_{\varphi_1\ldots\varphi_k(\varphi_{k+1}\ldots\varphi_n(n))}(x_k)$, c'est donc une sous-suite de la suite $f_{\varphi_1\ldots\varphi_k(n)}(x_k)$ qui converge déjà vers $f(x_k)$. A fortiori $f_{\varphi(n)}(x_k) \rightarrow f(x_k)$.

Montrons que la fonction f obtenue est uniformément continue sur notre ensemble dense x_l . On pourra alors appliquer le théorème de prolongement des applications uniformément continues, puisqu'on tombe dans un espace complet. Soit $\varepsilon > 0$; On a pour tout k, l et n , $d(f(x_k), f(x_l)) \leq d(f(x_l), g_n(x_l)) + d(f(x_k), g_n(x_l)) + d(g_n(x_k), g_n(x_l))$. Or la suite des g_n est équicontinue. Il existe η tel que pour tout $d(x, y) \leq \eta$, on a pour tout n , $d(g_n(x), g_n(y)) \leq \varepsilon$. On suppose donc k et l choisis de manière à ce que $d(x_k, x_l) \leq \eta$. On a alors pour $n \geq N$, $d(f(x_l), g_n(x_l)) \leq \varepsilon$, et pour tout $n \geq N'$, $d(f(x_k), g_n(x_k)) \leq \varepsilon$. Ainsi, si $n \geq \max(N, N')$, on a $d(f(x_k), f(x_l)) \leq 3\varepsilon$. Donc dès que $d(x, y) \leq \eta$, $d(f(x_k), f(x_l)) \leq 3\varepsilon$, donc l'uniforme continuité de f . On la prolonge donc en une fonction g . Elle est elle-même uniformément continue de module de continuité égal à celui de f .

Il reste à montrer que $f_{\varphi(n)} \mapsto g$ uniformément. Or si l'on se donne un $\varepsilon > 0$, on peut trouver un x_l tel que $d(x, x_l) \leq \eta$ avec les notations précédentes. Par équicontinuité de g_n , on a $|g_n(x) - g_n(x_l)| \leq \varepsilon$, pour tout n , Notamment en faisant tendre n vers ∞ on a $|g(x) - g(x_l)| \leq \varepsilon$. On considère donc maintenant un certain N tel que $n \geq N \Rightarrow d(g_n(x_l), g(x_l)) \leq \varepsilon$. On obtient pour $n \geq N$, $d(g(x), g_n(x)) \leq d(g_n(x), g_n(x_l)) + d(g(x_l), g_n(x_l)) + d(g(x_l), g(x)) \leq 3\varepsilon$.

Réciproquement, une famille A relativement compacte est telle que l'image en x l'est aussi: l'application $u : f \mapsto f(x)$ est continue pour tout x par définition de la convergence uniforme, et $u(A) \subset u(\bar{A})$, ce dernier étant compact. Pour l'équicontinuité, on extrait par précompacité un sous-ensemble fini de A noté $(f_1, \ldots, f_p)$ telle que A soit recouvert par les $B(f_i, \varepsilon)$. L'équicontinuité s'en déduit immédiatement: $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_p(x)) + d(f_p(x), f_p(y)) + d(f_p(y), f(y)) \leq 2|d(f, f_p)|_\infty + d(f_p(x), f_p(y)) \leq 2\varepsilon + d(f_j(x), f_j(y))$ il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout j , pour tout x et y à distance de η , on a $d(f_j(x), f_j(y)) \leq \varepsilon$. D'où l'équicontinuité.

Penser à l'application d'Ascoli aux opérateurs compacts (si compact l'adjoint aussi)