

Combien y-a-t-il de manières de payer 100 euros avec des pieces de 1,2 euros, et des billets de 5 euros? (cf developpement 13 sebastien pellerin algèbre

Pierre Lissy

May 11, 2010

On considère les developpements en séries formelles de fractions rationnels suivants:

$$(1 - X)^{-1} = \sum X^k.$$

$$(1 - X^2)^{-1} = \sum X^{2k}.$$

$$(1 - X^5)^{-1} = \sum X^{5k}.$$

On a donc en faisant le produit terme à termes de ses séries formelles que $F(X) = (1 - X)^{-1}(1 - X^2)^{-1}(1 - X^5)^{-1} = \sum p(d)X^d$, avec $p(d)$ des coefficients à déterminer. Remarquons que le coefficient qui nous intéresse est $p(100)$. En effet, $p(d)$ correspond au nombre de manières de payer d euros avec des pieces de 1,2 euros, et des billets de 5 euros, puisque si l'on considère le produit $(\sum X^k)(\sum X^{2k})(\sum X^{5k})$, on voit que devant le coefficient de X^i on est bien allé chercher les manières de décomposer i avec nos partitions. Décomposons notre fraction en éléments simples dans $\mathbb{C}$. (avec $\alpha = e^{2i\pi/5}$) $F(X) = (1 - X)^{-3}(1 + X)^{-1}(1 + X + X^2 + X^3 + X^4)^{-1} = (1 - X)^{-3}(1 + X)^{-1}(X - \alpha)(X - \alpha^2)(X - \alpha^3)(X - \alpha^4)$ d'où $F(X) = \frac{a}{(1 - X)^3} + \frac{b}{(1 - X)^2} + \frac{c}{(1 - X)} + \frac{d}{1 + X} + \frac{e}{X - \alpha} + \frac{f}{X - \alpha^2} + \frac{g}{X - \alpha^3} + \frac{h}{X - \alpha^4}$. $F(X) = \bar{F}(X)$ d'où $h = \bar{h}$ et $g = \bar{f}$. $F(X)(1 - X)^3 \rightarrow 1/10 = a$. $F(X)(1 + X) \rightarrow 1/8 = d$. On multiplie la fraction par $X - \alpha$ et on fait tendre X vers α . On obtient $(1 - \alpha)^{-3}[(1 + \alpha)(\alpha - \alpha^2)(\alpha - \alpha^3)(\alpha - \alpha^4)^{-1}] = e$. De même

$$g = (1 - \alpha^2)^{-3}[(1 + \alpha^2)(\alpha^2 - \alpha)(\alpha^2 - \alpha^3)(\alpha^2 - \alpha^4)^{-1}]$$

. Il reste donc à déterminer b et c .

$$F(X) - a(1/(1 - X)^3) = \frac{b}{(1 - X)^2} + \frac{c}{(1 - X)} + \frac{d}{1 + X} + \frac{e}{X - \alpha} + \frac{f}{X - \alpha^2} + \frac{g}{X - \alpha^3} + \frac{h}{X - \alpha^4}$$

. Donc

$$(F(X) - 1/10(1/(1 - X)^3))(1 - X)^2 = (X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 7X + 9)/10(1 + X + X^2 + X^3 + X^4)(1 + X) \rightarrow 1/4 = b.$$

.

$$\begin{aligned} & (F(X) - 1/10(1/(1 - X)^3 - 1/4(1/(1 - X)^2)))(1 - X) \\ &= (5X^4 + 13X^3 + 17X^2 + 17X + 13)/20(1 + X + X^2 + X^3 + X^4)(1 + X) \rightarrow 13/40 = c. \end{aligned}$$

Ainsi, on connaît $F(X)$. Il reste donc à remarquer qu'en dérivant de manière formelle $1/(1 - t)$ deux fois, on obtient l'inverse formel de $1/(1 - t)^2$ et de $1/(1 - t)^3$. Ainsi, $F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} [1/20(k + 2)(k + 1) + 1/4(k + 1) + 13/40 + (-1)^k/8 - 2Re(ea^{-k-1}) - 2Re(fa^{-2k-2})]X^k$. Donc $p(k) = 1/20(k + 2)(k + 1) + 1/4(k + 1) + 13/40 + (-1)^k/8 + 2Re(ea^{-1-k}) + 2Re(fa^{-2k-2})$ en $k = 100$, compte tenu du fait qu'on arrive à montrer que $Re(ea^{-1}) = (-5 + \sqrt{5})/100$ et $Re(fa^{-2}) = (-5 - \sqrt{5})/100$, on a $p(100) = 1/20(102)(101) + 1/4(101) + 13/40 + 1/8 + 4 * (5/100) = 541$.