Caractérisation de Sylvester des matrices sym def pos, et des matriecs positives (Gourdon

Pierre Lissy

May 3, 2010

Théorème 1. *Une matrice sym S est déf pos ssi tous ses déterminants mineurs principaux sont strictement positifs.*

Proof. La condition est nécessaire. En effet, si l'on note q la forme quadratique canoniquement associéé à la matrice S, et ε_i la base canonique. Alors La matrice mineure M_k n'est rien d'autre que la restriction à $Vect(e_1, \dots e_k)$ de q, qui reste définie positive et donc de déterminant strictement positif (puisque les valeurs propres de la matrice associée sons trictement positives et que le déterminant est le produit de ses valeurs propres).

Inversément, supposons tous les mineurs princpaux strictement positifs. Raisonnons par récurrence sur n. pour $n = 1$ le résultat est évident. Supposons le résultat vrai pour toute matrice de tailel au plus $n-1$. Soit S de taille n. Notons H l'hyperplan défini par $H = Vect(e_,1 \dots, e_n)$. L'hypothèse de récurrence assure que q_H est définie positive (puisque sa matrice est la restriction qui vérifie que tous ses mineurs sont strictement positifs). De plus q étant définie positive, on est sûr que l'orthogonal de H pour q est en somme directe avec H. Notons $e_1, \dots e_n$ une base $q-orthogonale$ adaptée à cette décomposition, mais telle que les n-1 premiers vecteurs soient orthonormés pour cette base. Alors il existe une base dans laquelle la matrice de q vaut $Id, \alpha = U$. Donc $S =^t OUO$ où O est la matrice de passage de ε_i à e_i. Mais dans ce cas, comme $det(S) = det(O)^2\alpha > 0$, on a $\alpha > 0$, ce qui prouve que la matrice dans la base e_i de q est définie positive, donc q est définie positive. □

Théorème 2. *Une matrice sym est positive ssi tous les mineurs extraits diagonaus de cette matrice sont positifs (ie les det M_I sont positifs avec I une partie de $\{1, \dots, n\}$, et M_i est la matrice des m_{ij} avec $\{i, j\} \in I^2$).*

Proof. La condition est nécessaire par le même argument que précédemment: la matriec mineure est la matrice de la restriction de q à $Vect(e_i, i \in I)$.

Reste à voir pourquoi la démonstration est suffisante.

Lemme 1. *Posons $X^n - b_1X^{n-1} + \dots + (-1)^n b_{n-1}$ le polynôme caractéristique de A; Alors le coefficient b_i du polynôme caractéristique est la somme des mineurs diagonaux d'ordre i)*

En effet,Si l'on considère $\chi_A = det(XI_n - A)$, il faut regarder d'où sont issus les termes de degré i.

On écrit A sous forme colonne: $A = [C_1, \dots C_n]$. Du coup, $XI_n - A = [X\varepsilon_1 - C_1, \dots, X\varepsilon_n - C_n]$. On a donc la formule suivante en utilisant la multilinéarité du déterminant. $\chi_A = (-1)^n det(C_1, \dots C_n) + (-1)^{n-1} \sum i = 1^n det(C_1, \dots C_{i-1}, \varepsilon_i, C_{i+1}, \dots C_n) + (-1)^{n-k} X^k \alpha_k + \dots - X^{n-1} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_1, \dots \varepsilon_{i-1}, C_i, \varepsilon_{i+1}, \dots)$. α_k est une somme de termes obtenus en faisant en sorte de ne choisir que k coefficients diagonaux. Autrement dit, $\alpha_k = \sum_{\Gamma_i} \beta_i$ où Γ_i est un ensemble d'indices et β_i associé au Γ_i est $det(D_i)$, où $D_i = C_i$ pour $i \in \Gamma_i$, et $D_i = \varepsilon_i$ sinon. On remarque qu'en developpant successivement par rapport aux colonnes où il y a plein de zéros on tombe bien sur un mineur principal d'ordre k, c'est ce qu'on voulait.

Revenons à nos moutons. D'abord, grâce au lemme ci-dessous, on a clairement en appliquant ceci à $-x$ avec $x > 0$ que $det(-xI_n - A) = (-1)^n(x^n + b_1x^{n-1} + b_{n-1}$ est strictement du signe de $(-1)^n$, donc que $det(xI_n + A) > 0$. Notamment, c'est vrai pour les sous-matrices A_k puisqu'on a bien les hypothèses qu'il faut (tout les mineurs principaux sont positifs). Ainsi, pour tout k et tout

$x > 0$, on a $det(xI_k + A_k) > 0$. Donc par la question précédente, la matrice $xI_n + A$ est définie positive, ce qui implique notamment ${}^tX(xI_n + A)X \geqslant 0$. On fait tendre maintenant x vers 0 (ce qui est possible car 0 est adhérent à $\mathbb{R}^{+*}$. et le tour est joué. $\square$