

# Nombres de Catalans (page du FGN algèbre 1)

Pierre Lissy

April 29, 2010

On note  $C_n$  le nombre de “parenthésages” distincts d’un mot à  $n$  éléments noté  $a_1 \dots a_n$ . On souhaite calculer  $C_n$ . Commençons par préciser ce que nous appelons un parenthésage: c’est une manière de regrouper les termes deux à deux, un terme regroupé étant un nouveau terme que l’on peut regrouper. Ainsi, dans un parenthésage, on n’a que des regroupements deux à deux. C’est donc aussi de manière équivalente le nombre de manières de regrouper des termes dans un produit non associatif  $a_1 \dots a_n$ .

**Exemple 1.**  $((12)(34))(56)$  est un parenthésage, ainsi que  $1(23)(4(56))$  mais pas  $(123)(456)$  par exemple.

Regardons ce qui se passe pour de petites valeurs de  $n$ . D’abord clairement pour  $n = 1$  ou  $n = 2$  il n’y a qu’un seul parenthésage possible. Pour  $n = 3$ , on a  $(a_1 a_2)(a_3)$  et  $(a_1)(a_2 a_3)$  donc  $C_3 = 2$ . Maintenant, remarquons la chose suivante. pour  $n \geq 2$ , alors tout mot parenthésé se décompose de manière unique de la forme  $(a_1 \dots a_k)(a_{k+1} a_n)$  où  $k \leq n-1$ . En effet, cela considère au dernier produit que l’on effectue. De plus, le mot  $a_1 \dots a_k$  et lui-même un produit de termes, il a donc  $C_k$  possibilité de parenthésage, tout comme  $a_{k+1} a_n$  qui a  $C_{n-k}$  possibilité de parenthésage. Ainsi, comme on fait varier  $k$  de 1 à  $n-1$  on a l’égalité  $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$ . Considérons la série génératrice entière  $f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X^n$ .

On a l’égalité formelle  $f^2 = \sum_{n=2}^{\infty} (\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}) X^n = \sum_{n=2}^{\infty} C_n X^n = f - X$ . Donc formellement  $f$  est racine du polynôme  $T^2 - T + X$ . Son discriminant est  $\Delta = 1 - 4X$ . Sous certaines conditions. Supposons maintenant que  $f$  ait en temps que série entière un rayon de convergence non nul noté  $R$ . Alors pour  $x \leq \min(R, 1/4)$ , on a  $f(x) = (1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x})/2$ , avec  $\varepsilon(x)$  qui vaut plus ou moins 1. Mais comme  $f$  est continue nécessairement  $\varepsilon(x)$  est continue et donc constante égale à 1 ou -1. Or  $f(0) = 0$  donc nécessairement  $\varepsilon(x) = -1$  et on obtient que  $f(x) = (1 - \sqrt{1-4x})/2$ .

Inversément, considérons la fonction  $g : x \mapsto (1 - \sqrt{1-4x})/2$ . Alors cette fonction est développable en série entière au moins sur  $B(0, 1/4)$  (car  $\sqrt{x}$  est DSE pour  $|x| < 1$  et elle vérifie sur l’équation fonctionnelle  $g(x)^2 - g(x) + 1 = 0$ ). Considérons son développement en série entière  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  (car  $f(0) = 0$ ). Alors en utilisant le principe des zéros isolés et le fait que par produit de Cauchy  $f(x)^2$  a un DSE qui est  $\sum_{n=2}^{\infty} (\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}) x^n$ , les coefficients du DSE vérifient nécessairement la relation  $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$  pour  $n \geq 2$ . De plus, on remarque que  $\sqrt{1-4x} = 1 - 2x + o(x)$  donc  $f(x) = (1 - (1 - 2x)) + o(x) = x + o(x)$  et  $a_1 = 1$  nécessairement. Ainsi, les  $a_i$  vérifient la même relation de récurrence que les  $C_i$  et s’initialisent de la même manière. On a donc pour tout  $i \geq 1$  que  $a_i = C_i$ . Ainsi, le rayon de convergence de la série entière considérée est bien au moins égal à  $1/4$  et toutes les considérations que nous avons faites jusqu’à présent ont un sens, notamment  $f(x) = (1 - \sqrt{1-4x})/2$ . Dérivons cette égalité.  $f'(x) = (\sqrt{1-4x})^{-1/2}$ . Mais le développement en série entière de  $(1+u)^{1/2}$  nous donne  $(\sqrt{1-4x})^{-1/2} = \sum_{n=1/2}^{\infty} C_{-1/2}^n (-1)^n 4^n x^n$ . Mais  $C_{-1/2}^n = (-1/2)(\dots - 1/2 + n)/n! = (-1)^n 1/2^n (2n)!(n!(2^n(n!))) = (2n)!(n!)^2/(4^n n!)$ . Ainsi, on a  $f'(x) = \sum_{n=1/2}^{\infty} C_{-1/2}^n x^n$ . En intégrant terme à terme et en tenant compte du fait que  $f(0) = 0$  on obtient  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^{n+1}/(n+1) x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k$ . D’où en utilisant le principe du prolongement analytique une fois de plus, on a  $C_n = C_{-1/2}^{n+1}/n$ .

## References

[1]