

Déterminant de Cauchy et application au théorème de Müntz (fgn 2 et gourdon analyse)

Pierre Lissy

May 5, 2010

Il faut redémontrer rapidement le déterminant de Cauchy. Démontrons le résultat par récurrence sur n , étant entendu que pour $n = 1$ ça va à peu près. Notons $D(n)$ le déterminant de Cauchy à calculer, étant fait comem hypothèse que pour toutes données on est capable de calculer $D(n-1)$. Alors multiplions chaque colonne j par $a_n + b_j$. On obtient $D(n) = \frac{1}{(a_n + b_1) \dots (a_n + b_n)} \det(A')$, où le coefficients (i, j) de A' est $\frac{a_n + b_j}{a_i + b_j} = 1 + \frac{a_n - a_i}{a_i + b_j}$. Notamment la dernière ligne est composée uniquement de 1. En la retranchant à toutes les autres on obtient $D(n) = \frac{1}{(a_n + b_1) \dots (a_n + b_n)} \det(B)$ avec $b_{i,j} = \frac{a_n - a_i}{a_i + b_j}$ sauf la dernière ligne qui vaut 1. Du coup, on peut sortir sur chaque ligne le terme $a_n - a_i$ et on obtient $D(n) = \frac{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1) \dots (a_n + b_n)} \det(C)$ avec maintenant C dont le coef i, j est $\frac{1}{a_i + b_j}$ sauf la dernière ligne qui vaut 1. Du coup maintenant on retranche la dernière colonne pour obtenir $D(n) = \frac{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1) \dots (a_n + b_n)} \det(D)$ avec D qui vaut n'importe quoi sur la dernière colonne dont on a rien à faire à part le coef 1 en bas, des zeros sur la dernière ligne et le reste vaut la matrice des $\frac{(b_n - a_j)}{(a_i + b_j)(a_i + b_n)}$. Du coup en développant par rapport à la dernière ligne on obtient

$$D(n) = \frac{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1) \dots (a_n + b_n)} \det\left(\frac{(b_n - a_j)}{(a_i + b_j)(a_i + b_n)}\right)$$

. En sortant encore une fois les termes en facteurs dans les lignes et les colonnes, on obtient

$$D(n) = \frac{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})(b_n - b_1) \dots (b_n - b_{n-1})}{(a_n + b_1) \dots (a_n + b_n)(a_1 + b_n) \dots (a_{n-1} + b_n)} \det\left(\frac{(b_n - a_j)}{(a_i + b_j)(a_i + b_n)}\right).$$

On conclut par récurrence.

Expliquons comment on en déduit le théorème de Müntz.

Lemme 1. On pose $E_n = \text{Vect}(x^{\alpha_i})$. Alors la quantité suivante : $\Delta_N(m) = d(x^m, E_N)$ vaut $\frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod |\frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1}|$.

Proof. On note G les déterminants de Gram associé à la norme deux intégrale sur $[0, 1]$, et on admet le fait que $\Delta_N(m)^2 = \frac{G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n}, x^m)}{G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n})}$. Or $(x^a, x^b) := \int_0^1 x^{a+b} dx = \frac{1}{a+b+1}$ pour $a > 0, b > 0$. Donc les déterminants de Gram qui nous intéressent sont en fait des déterminants de Cauchy. On applique donc la formule précédente avec $a_i = \alpha_i + 1$ et $b_i = \alpha_i$ (en supposant par convention que $\alpha_{N+1} = m$). On obtient $G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n}, x^m) = \frac{\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j) \prod_i (\alpha_i - m)^2}{(2m+1)^2 \prod_{i,j} (\alpha_i + \alpha_j + 1) \prod (\alpha_i + m + 1)^2}$,

et de même $G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n}) = \frac{\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)}{\prod_{i,j} (\alpha_i + \alpha_j + 1)}$, et le quotient donne bien le carré du résultat voulu. □

On en déduit le théorème de Müntz. En effet, la condition est nécessaire. Si $E = Vect(x^{\alpha_i})$, on considère un certain $m > 0$ tel que $m \neq \alpha_i$ pour tout i . Comme la fonction x^m est supposée être dans l'adhérence de E , cela signifie que la suite $\Delta_N(m)$ doit tendre vers 0 quand N tend vers ∞ . De deux choses l'une.

1. La suite α_n est majorée. La série diverge alors bien
2. α_n tend vers ∞ . Alors $\alpha_n > m$ pour tout n assez grand. Mais du coup en considérant $\log(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1}) = \log(1 - \frac{2m + 1}{\alpha_n + m + 1}) \simeq (-2m + 1)/\alpha_n$. Mais le fait que la limite des $\Delta_N(m)$ tende vers 0 assure que la série $\log(\Delta_n)$ diverge vers $-\infty$, ce qui implique par l'équivalent précédent (on a un signe constant à partir d'un certain rang!) la divergence de la série.

Inversément, la condition est suffisante. Pour montrer le résultat, il suffit par le théorème de Weierstrass de montrer que les x^m avec m entier peuvent être approchés par nos éléments de E . Encore une fois il suffit de vérifier que $\Delta_N(m)$ tend vers 0. Si la suite α_n est majorée, c'est évident. Sinon, on réutilise l'équivalent précédent qui permet de conclure en repassant à l'exponentielle qu'on a le résultat désiré.