

Résolution de l'équation de la chaleur par transformée de Fourier.

Pierre Lissy

June 10, 2010

On considère $u_t = u_{x,x}$ dans $Q = (0, L) \times (0, \infty)$, avec $u(L, t) = u(0, t) = 0$ pour $t \in [0, \infty)$ et $u(x, 0) = u_0(x)$ où u_0 est une application de classe C^1 sur $[0, L]$ qui s'annule en 0 et L . La série de Fourier de u_0 est normalement convergente, mais on va voir qu'on va pas la considérer tout de suite. L'idée de départ est de chercher une solution sous la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$. L'équation de la chaleur est alors équivalente à $f(x)g'(t) = f''(x)g(t)$. On va chercher une solution telle que f et g ne s'annulent pas respectivement $(0, L)$ et $(0, \infty)$. L'équation devient alors équivalente à $f''(x)/f(x) = g'(t)/g(t)$. Ceci étant vrai pour tout x et tout t , on a donc que $f''(x) = \lambda f(x)$ et $g'(t) = \lambda g(t)$.

Disjonctons les cas suivant le signe de λ . Si $\lambda > 0$, on a que $f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Comme on veut $f(0) = 0$ et $f(L) = 0$, et donc $A + B = 0$ et $Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 0$, ce qui s'inverse nécessairement en $A = B = 0$ et f est identiquement nulle, ce qui ne convient pas pour résoudre l'équation. On aurait le même type de problème avec $\lambda = 0$ et donc nécessairement $\lambda < 0$. On écrit donc $\lambda = -\mu^2$. On écrit alors $f(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$, on veut donc que $f(0) = f(L) = 0$ ce qui implique d'abord que $A = 0$, et ensuite que $B\sin(\mu L) = 0$, donc que $\mu = k\pi/L$. Du coup, g est nécessairement de la forme $be^{-n^2\pi^2/L^2 t}$. On pose donc $u_n(x, t) = b_n \sin(nx) e^{-n^2\pi^2/L^2 t}$ et ce sont bien des solutions au moins de la partie $u_t = u_{x,x}$. L'idée est donc comme l'équation est linéaire de considérer une somme infinie de ses solutions $\sum b_n \sin(nx) e^{-n^2\pi^2/L^2 t}$, qui vérifiera bien l'équation pour peu qu'on peut dériver sous le signe somme. Mais on sait que h est donc de classe C^1 et s'annulant en 0 et L . On peut donc la prolonger par imparité en $\bar{h}$ sur $(-L, 0)$, on peut alors écrire avec convergence normale que $\bar{h}(x) = \sum b_n \sin(n\pi/L x)$. De plus on sait sur que b_n sont l^1 . Si l'on pose maintenant $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi/L x) e^{-n^2\pi^2/L^2 t}$. On a convergence normale en (t, x) de cette série (puisque les b_n sont l^1), et donc cette série est continue sur $\bar{Q}$. De plus, on peut dériver sous le signe somme car on a convergence sur tout compact de Q , notamment sur tout compact de la forme $[0, L] \times [\varepsilon, M]$. On a alors que le terme général de la série est majoré par $|b_n| n^{2k} e^{-n^2\pi^2/L^2 \varepsilon}$, qui converge bien. On a donc CVN de la série dérivée sous le signe somme et on a bien $u_t = u_{x,x}$. On a bien $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ et $u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi/L x) = u_0(x)$ et on a au moins existence d'une solution. Pour l'unicité, c'est plus compliqué.