

Classes de similitude et topologie (fgn 2 pages?)

Pierre Lissy

May 3, 2010

Théorème 1. *La classe de similitude est bornée ssi la matrice est homothétique. (vrai dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

Proof. Le sens réciproque est évident. Inversément, supposons la matrice non homothétique. Il s'agit de montrer que la classe de similitude n'est pas bornée. Par équivalence des normes en dimension finie, il suffit de le faire pour une norme, par exemple le sup des valeurs absolues des coefficients. La matrice n'étant pas homothétique, il existe un certain u tel que $u, f(u)$ est libre. En effet, on rappelle que si pour tout u non nul, on a $f(u) = \lambda(u)u$ alors notamment $f(u+v) = \lambda(u+v)(u+v) = \lambda(u+v)u + \lambda(u+v)v = \lambda(u)u + \lambda(v)v$. Il suffit alors de choisir un u et v libres pour conclure que dans ce cas $\lambda(u+v) = \lambda(u) = \lambda(v)$, mais il est évident que pour u et v lié on a $\lambda(u) = \lambda(v)$. donc λ est bien constante. On choisit alors n'importe quelle base $e_1, \dots, e_n$ obtenue en complétant $e_1 = \lambda u$ avec λ non nul et $e_2 = f(u)$. La matrice B de f est semblable à A , et sa première colonne est $(0, \lambda, 0, \dots)^t$, ce qui tend vers ∞ quand $\lambda \rightarrow \infty$. La classe de similitude ne peut être bornée. $\square$

Théorème 2. *0 est dans l'adhérence de la classe de similitude ssi la matrice est nilpotente. (cas complexe et réel vrai)*

Proof. Si 0 est adhérent, on a une suite de matrices A_p semblables qui tendent vers 0. Or l'application qui à A associe χ_A étant continue (on munit les polynômes de degré inférieur à n de la norme infinie des coefficients, de tels coefficients sont polynômiaux en ceux de A et donc dépendent continuellement de A), on a $\chi_{A_p} \rightarrow \chi_0 = X^n$. Mais l'application $A \mapsto \chi_A$ est constante sur les classes de similitudes, la suite χ_{A_p} est donc constante et sa limite étant X^n , tout les polynômes ont comme polynôme caractéristique X^n ce qui implique que la matrice est nilpotente (pour s'en convaincre on la trigonalise avec que des zéros sur la diagonale, en passant à la puissance n on obtient forcément 0)

Le sens réciproque est moins évident. La matrice A étant nilpotente, on peut quitte à la trigonaliser supposer qu'elle est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pose alors $P(k)$ la matrice de changement de base associée à la base $e_1/k, \dots, e_n/(k^n) = (e'_i)$. On remarque que $A(e'_i) = a_{i-1,i}/p e'_{k-1} + \dots + a_{1,i}/p^{i-1} e'_1$ et donc la suite des coefficients de la matrice semblable $P(k)^{-1}AP(k)$ tend bien vers 0, ce qui est le résultat voulu. $\square$

Théorème 3. *La classe de similitude est fermée ssi A est diagonalisable.*

Proof. On commence par supposer A diagonalisable. Alors la classe de similitude est fermée. C'est assez évident. En effet, si l'on considère une suite de matrices semblables à A notée A_p qui tend vers B adhérent à A . Alors par un argument déjà développé sur le polynôme caractéristique de A on a que $\chi_B = \chi_A$. De plus, comme $\mu_A(A_p) = 0$ pour tout p (puisque le polynôme minimal est le même pour tous les éléments de la classe de similitude), on en déduit par passage à la limite que $\mu_A(B) = 0$. Donc B admet un annulateur scindé simple et est nécessairement diagonalisable. De plus ses valeurs propres sont celles de A , et la multiplicité est la même. Donc dans une base adaptée à chaque fois, A et B ont la même matrice, ce qui implique qu'elles sont semblables. Inversément, supposons la classe de similitude fermée. Alors l'exercice précédent nous permet de conclure assez rapidement. En effet, comme on peut trigonaliser la matrice A on peut supposer qu'elle est trigonale. Il suffit alors une fois de plus de poser $e_1/k, \dots, e_n/(k^n) = (e'_i)$ une

nouvelle base. On voit qu'une telle base ne modifie pas les coefficients diagonaux et est telle que les coefficients extra-diagonaux tendent vers 0. Ainsi, à la limite on obtient une matrice diagonale qui est dans la classe de similitude, et par définition A est diagonalisable. $\square$

Remarque 1. *Ceci montre que dans la décomposition de Dunford, l'endomorphisme diagonalisable D est dans l'adhérence de la classe de similitude de A*

References

[1]