

Consistance et convergence des méthodes itératives (Sibony page I 46)

Pierre Lissy

April 30, 2010

Consistance.

Proof. On a par définition $x_{k+1} = Bx_k + c$. Supposons que $c = (I - B)A^{-1}b$ et que $(I - B)$ est inversible. Si l'on suppose que x_k tend vers x , en passant à la limite dans l'égalité au-dessus, on obtient $x = Bx + c = Bx + (I - B)A^{-1}b$, autrement dit $(I - B)x = (I - B)A^{-1}b$ et comme la matrice $(I - B)$ est inversible ceci donne bien $x = A^{-1}b$. Inversément, supposons que x_k converge vers x implique que $x = A^{-1}b$. D'abord, si x_k converge vers x , alors $x = A^{-1}b$ et donc nécessairement $A^{-1}b = BA^{-1}b + c$, ie $c = (I - B)A^{-1}b$. Supposons que $(I - B)$ n'est pas inversible. Alors si x_k converge vers x , on doit avoir $x = Bx + c = Bx + (I - B)A^{-1}b$, ie $(I - B)x = (I - B)A^{-1}b$, mais ceci a alors d'autres solutions que $A^{-1}b$ (on peut rajouter n'importe quel élément du noyau de $(I - B)$), et on a que la méthode n'est pas consistante. $\square$

Stabilité.

Proof. Posons $x = A^{-1}b$. Comme la méthode est supposée consistante, nécessairement $c = (I - B)A^{-1}b$ et que $(I - B)$ est inversible. Ainsi on a $x_{k+1} - x = Bx_k + ((I - B)A^{-1}b) - A^{-1}b = B(x_k - x)$ et par récurrence immédiate $x_{k+1} - x = B^k(x_0 - x)$. Cette méthode est convergente ssi $B^k(x_0 - x)$ tend vers 0 pour tout x_0 , ie ssi B^k converge simplement vers 0. Evidemment, si une suite d'opérateurs linéaires converge en norme subordonnée vers 0, elle converge simplement vers 0. La réciproque ne paraît pas aussi claire. En fait, elle l'est. En effet, notre espace $M_n(\mathbb{C})$ étant de dimension finie, c'est notamment un espace de Banach et donc on y applique le théorème de Banach-Steinhaus: si on suppose que B^k tend vers 0 simplement, alors on a d'abord que pour tout y , $B^k y$ est bornée et donc que $\sup_k |||B^k||| = c < \infty$. La suite $|||B^k|||$ est bornée, elle admet donc une valeur d'adhérence notée b . Mais cette valeur d'adhérence ne peut valoir que 0. En effet si $|||B_{n_k}||| \rightarrow b$, alors comme pour tout n_k , il existe un x_{n_k} sur la sphère tel que $|||B_{n_k}||| = ||B_{n_k}(x_{n_k})||$, on a $||B_{n_k}(x_{n_k})|| \rightarrow b$. Mais quitte à extraire une sous-suite on peut encore supposer $x_{n_k} \rightarrow x$ sur la sphère. Alors $||B_{n_k}(x_{n_k})|| \leq ||B_{n_k}(x - x_{n_k})|| + ||B_{n_k}x|| \leq c||x - x_{n_k}|| + ||B_{n_k}x||$ et le membre de droite maintenant tend vers 0 donc celui de gauche aussi.

Ainsi B^k converge bien en norme vers 0 $\square$

Lien avec le rayon spectral.

Proof. Si B^k tend vers 0 alors notamment si $By = \lambda y$, on a $B^k y = \lambda^k y$, et donc $|\lambda^k| y \rightarrow 0$ ce qui implique que toutes les valeurs propres sont de module strictement plus petites que 1, et $\rho(B) < 1$.

Inversément, supposons $\rho(B) < 1$. Mettons B sous forme réduite de Jordan. B^k tend vers 0 implique que tous les blocs de Jordan tendent vers 0. Considérons un bloc de Jordan $\text{Diag}_d(\lambda) + N$. Si on le met à la puissance k , on observe très facilement par récurrence que le coefficient (i, j) est égal à $C_n^{j-i} \lambda^{n-j+i}$ pour $i \leq j \leq \min(n+i, d)$. Or dire que les blocs de Jordan tendent vers 0 équivaut à dire que tous les coefficients tendent vers 0, autrement dit pour tout i, j , $C_n^{j-i} \lambda^{n-j+i} \rightarrow 0$, ie $n! / ((n-j+i)!(j-i)!) \lambda^{n-j+i} \rightarrow 0$. On enlève tout ce qui ne dépend pas de n : $n! / ((n-j+i)!) \lambda^n \rightarrow 0$. On utilise Stirling: $n! / ((n-j+i)!) \simeq n^n (n-j+i)^{-(n-j+i)} e^{i-j} \simeq C_{ste} n^{j-i}$. On doit donc montrer que $n^{j-i} \lambda^n \rightarrow 0$, ce qui est le cas. $\square$