

Régularité d'une fonction convexe (page 155-156 choquet)

Pierre Lissy

June 12, 2010

On rappelle d'abord que la fonction pente est croissante. En effet, cela se voit très bien sur un dessin. On se donne trois réels $a < b < c$. On note $M(x)$ le point $(x, f(x))$. L'hypothèse de convexité nous dit que c est sous la droite joignant a et b . Ceci implique que la pente de la droite reliant a et c est plus petite que la pente reliant a et b (on a deux demi-droites qui partent d'un même point, pour qu'une soit en dessous de l'autre il faut que la pente soit plus petite!). Inversément, si on considère la droite qui relie b et c et celle reliant a et c , on comprends bien que la pente de celle reliant a et c est plus petite (sinon le point c serait au-dessus!). On a donc pour tout $a < b < c$ que $(f(b) - f(a))/(b - a) < f(c) - f(a)/(c - a) < (f(c) - f(b))/(c - b)$. On en déduit la croissance de la fonction pente. Si on se donne une fonction pente par rapport à un point w , on a si $x < y < w$ que $p(x) \leq p(y)$ en posant $a = x, b = y, w = c$ et en regardant la deuxième inégalité, de même on a si $x < w < y$ que $p(x) \leq p(y)$ en prenant $a = x, b = w, c = y$ et en regardant l'inégalité entre le premier et le troisième membre, on voit facilement comment finir.

Prenons $x < a < y$ et posons $p(t) = (f(t) - f(a))/(t - a)$. La fonction pente étant croissante, on a que $p(x) \leq p(y)$. Si l'on considère la borne inférieure des $p(y)$ tel que $y > a$, elle est donc finie et par croissance vaut exactement la limite des $p(y)$ quand $y \rightarrow a^+$. De même la borne supérieure des $p(x)$ quand $x < a$ est finie et vaut par croissance la limite des $p(x)$ quand $x \rightarrow a^-$. Par définition de la dérivée à gauche et à droite, on a donc que f est dérivable à gauche de dérivée exactement ce sup, de même pour la dérivée à droite on a exactement l'inf. Donc on a déjà clairement $p(x) \leq f'_d(a) \leq f'_g(a) \leq p(y)$. En faisant $y = b$ on a donc déjà les relations de gauche. Pour celles de droites, il suffit d'appliquer ce qui vient d'être fait en changeant a en b et en posant ce coup-ci $x = a$. On a le deuxième pack d'inégalités. On remarque qu'une fonction dérivable à gauche et à droite est assez clairement continue: on a que $(f(a + h) - f(a))/h$ qui a une limite finie quand $h \rightarrow 0+$ et quand $h \rightarrow 0-$, ce qui implique en multipliant par h qui tend vers 0 que $f(a + h) \rightarrow f(a)$ quand $h \rightarrow a^-$ et a^+ . On a donc bien que $f(a + h) \rightarrow f(a)$ quand $h \rightarrow 0$ (il suffit de séquentialiser et de disjoncter les points au-dessus et en dessous de a , on obtient deux sous-suites "exhaustives" qui ont la même limite ce qui permet de conclure).

On obtient directement la croissance des dérivées à droite et à gauche. De plus, on voit que si $a < b$ alors les deux intervalles suivants: $(f'_g(a), f'_d(a))$ et $(f'_g(b), f'_d(b))$ sont disjoints. Si l'on considère donc l'ensemble des $(f'_g(a), f'_d(a))$ quand a parcourt notre intervalle I , on obtient une union d'intervalles ouverts disjoints, dont certains sont éventuellement vides. Or un intervalle non vide contenant toujours un rationnel, on voit que par disjointité on crée une injection de l'ensemble des a tel que l'intervalle $(f'_g(a), f'_d(a))$ est non vide vers $\mathbb{Q}$. On a donc au plus un nombre au plus dénombrable de a tel que l'intervalle soit non vide, ce qui implique que sauf en un nombre au plus dénombrable de points notre fonction est dérivable.