

Théorème de D'Alembert-Gauss par les polynômes symétriques, Gourdon page 84

Pierre Lissy

April 30, 2010

Lemme 1. *On considère un polynôme réel de degré $2^n q$ avec q impair et $d \leq 1$. Alors P admet une racine dans $\mathbb{C}$*

Proof. On va démontrer le résultat par récurrence sur n .

1. Pour $n = 0$ c'est vrai : par le TVI, comme on a par exemple si le coefficient dominant est strictement positif que $P(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$ alors il s'annule forcément.
2. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$. On sait que dans un corps de décomposition du polynôme ce dernier est scindé. On le scinde donc $P = \prod (X - x_i)$. Pour $c \in \mathbb{R}$ on pose $y_{i,j} = x_i + x_j + cx_i x_j$. On va montrer que pour un certain i_c et j_c on a $y_{i_c, j_c} \in \mathbb{C}$. Posons $Q = \prod_{i < j} (X - y_{i,j})$. C'est un polynôme symétrique à coefficients réels en les x_i , on peut donc par théorème l'écrire comme un polynôme à coefficients réels en les polynômes symétriques élémentaires des x_i qui sont les coefficients de P et sont donc réels. Ainsi les coefficients de Q sont réels. De plus, le degré de Q est le cardinal de $i < j$, donc $\sum_1^d (j-1) = d(d-1)/2 = 2^n q(d-1)/2 = 2^{n-1} q(d-1)$, ce qui est de la forme $2^{n-1} q'$ avec q' impair. Ainsi, par hypothèse de récurrence le polynôme Q admet une racine complexe, autrement dit l'un des $y_{i,j}$ est complexe, ce qui est ce qu'on voulait. On a ainsi construit une application de $\mathbb{R}$ dans un ensemble fini, l'ensemble des $i < j$. Il existe donc c et c' distincts tels que $i_c = i_{c'}$ et $j_c = j_{c'}$. Posons $i_c = i_{c'} = (r, s)$. On a $(x_r + x_s) + cx_r x_s$ et $(x_r + x_s) + c'x_r x_s$ qui sont complexes avec c et c' différents. Ainsi, $x_r x_s$ et $x_r x_s$ sont des complexes. Ainsi ce sont des racines d'un polynôme complexe et donc $x_r \in \mathbb{C}$ et $x_s \in \mathbb{C}$. le polynôme a donc au moins une racine complexe.

Comme tout nombre se met sous la forme $2^n q$ avec q impair, on en déduit déjà que tout polynôme réel admet une racine éventuellement complexe. Pour étendre le résultat dans $\mathbb{C}[X]$. On considère un polynôme complexe $F \in \mathbb{C}[X]$. Alors on voit clairement que $F\bar{F}$ est un polynôme réel. En effet si on écrit $F = \sum a_i X^i$ alors $\bar{F} = \sum \bar{a}_i X^i$ et les coefficients sont les $\sum a_i \bar{a}_{n-j}$, donc déjà dans le cas n pair on obtient des termes tous conjugués deux à deux et c'est donc réel, et dans le cas n impair on obtient des termes conjugués deux à deux à part un terme qui est un carré et est donc réel. On a donc soit une racine de F et dans ce cas c'est gagné, ou alors une racine de $\bar{F}$ notée α . Mais alors clairement comme $\bar{F}(\alpha) = 0$ alors en repassant à la barre on a $F(\bar{\alpha}) = 0$ et F admet au moins une racine.

References

[1]