

Décomposition polaire

Pierre Lissy

April 30, 2010

Raisonnons par conditions nécessaire. Si $M = SO$, alors nécessairement, $M({}^tM) = SO{}^tO{}^tS = S^2$. Autrement dit, nécessairement S est une racine carré symétrique de la matrice symétrique définie positive $M({}^tM)$. Du coup, démontrons le lemme suivant.

Lemme 1. *Toute matrice symétrique définie positive T admet une unique racine carré symétrique, qui reste aussi SDP.*

Proof. Pour l'existence, c'est facile. On diagonalise T en BON, ie $OTO^{-1} = \text{diag}(\lambda_i)$. Les λ_i étant tous strictement positifs, la matrice $O\text{Diag}(\sqrt{\lambda_i})$ convient, elle est bien encore définie positive puisque tous les vecteurs propres sont > 0 .

L'unicité est un peu plus délicate. Prenons une racine quelconque de T , notée S . On a $S^2 = T$, ce qui montre trivialement que S et T commutent. Les sous-espaces propres de T sont donc stables par S . Soit E_λ un de ses sous-espaces propres, supposé de dimension d . On considère les induits sur ce sous-espace de T et S , notés T_F et S_F . Alors T_F est une homothétie, et $S_F^2 = \lambda I_d$. Mais S_F reste symétrique définie positive, elle se diagonalise donc en BON. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de diagonalisation, les vecteurs propres sont les μ_i . On a nécessairement du coup $S_F^2(e_i) = \lambda e_i = \mu_i^2$, autrement dit comme les μ_i sont strictement positifs, on n'a pas le choix, on est obligé de choisir $\mu_i = \sqrt{\lambda}$. Ainsi, S est entièrement déterminé sur tous les sous-espaces propres de T diagonalisable donc est entièrement déterminé sur $\mathbb{R}^n$ tout entier. $\square$

On a donc du coup démontré la partie injectivité dans le théorème. En effet, du coup S est unique et O l'est aussi puisqu'il ne peut valoir que MS^{-1} . La partie surjectivité est facile. On pose S la racine carré de $M({}^tM) = {}^tM.M$ et $O = MS^{-1}$. On sait par ce qui précède que S est définie positive. Il reste à se demander si O est une isométrie. Mais ${}^tOO = S^{-1}{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$.

L'application sur les matrices $(A, B) \mapsto AB$ est continue, sa restriction $S_n^{++} \times O_n$ est donc encore continue. Pour montrer que l'on a affaire à un homéomorphisme on n'a donc plus qu'à démontrer que $M \mapsto (S, O)$ est continue. On a besoin d'un petit lemme.

Lemme 2. *O_n est compact.*

Proof. O_n est fermé car s'est $f^{-1}(\{I_n\})$ avec f l'application continue qui à A associe $A{}^tA$. O_n est bornée car toute matrice de O_n vérifie que ses coefficients sont inférieurs ou égaux à 1 donc $\|O\|_\infty \leq 1$. $\square$

On peut alors conclure. Supposons que $M_k \mapsto M$. On décompose chacun de M et M_k dans la décomposition polaire. $M = SO$ et $M_k = S_kO_k$. On a donc que $O_k = M_kS_k^{-1}$. Mais O_n étant compact on a l'existence au moins d'une sous-suite de O_k convergente. Autrement dit $O_{\varphi(k)} \rightarrow F$. De plus, comme $M_{\varphi(k)} \rightarrow M$, on a que $S_k \rightarrow MF^{-1} = G$. Mais l'espace des matrices symétriques définies positives a comme fermeture l'espace des matrices positives. Donc G reste symétrique positive, et est inversible puisque F et M le sont. Ainsi $M = GF$ avec F orthogonale et G symétrique définie positive. Par unicité de la décomposition polaire, on n'a pas le choix, $F = O$ et $G = S$. Ainsi O_k est une suite d'un compact qui a une unique valeur d'adhérence, elle converge donc vers cette valeur d'adhérence et du coup $S_k \mapsto S$. L'application est bien continue.