

Décomposition polaire vue comme une action de groupe sur les matrices (Mneiné-Testard modifié, Serre modifié...)

Pierre Lissy

May 3, 2010

Théorème 1. *On considère l'action de groupe suivante sur les matrices réelles: $\varphi : O_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ qui à O et M associe $M^t O$. C'est bien une action de groupes car $\varphi(O, \varphi(O', M)) = \varphi(O', M)^t O = M^t O'^t O = M^t (OO') = \varphi(OO', M)$. Alors l'orbite de toute matrice M contient une matrice symétrique positive. De plus, si M est inversible, l'orbite de $M \in GL_n(\mathbb{R})$ contient une UNIQUE matrice symétrique positive, et elle est même du coup nécessairement définie positive.*

Proof. On Commence par démontrer la deuxième partie du théorème. Il s'agit de montrer que pour M inversible, il existe une unique matrice S symétrique déf pos telle que $OM = S$, ie $M = {}^t OS$.

Raisonnons par conditions nécessaire. Si $M = SO$, alors nécessairement, $M({}^t M) = SO^t O^t S = S^2$. Autrement dit, nécessairement S est une racine carré symétrique de la matrice symétrique déf pos $M^t M$. Du coup, démontrons le lemme suivant.

Lemme 1. *Toute matrice symétrique définie positive T admet une unique racine carré symétrique, qui reste aussi SDP.*

Proof. Pour l'existence, c'est facile. On diagonalise T en BON, ie $OTO^{-1} = \text{diag}(\lambda_i)$. Les λ_i étant tous strictement positifs, la matrice $O \text{Diag}(\sqrt{\lambda_i})$ convient, elle est bien encore déf pos puisque tous les vecteurs propres sont > 0 .

L'unicité est un peu plus délicate. Prenons une racine quelconque de T , notée S . On a $S^2 = T$, ce qui montre trivialement que S et T commutent. Les sous-espaces propres de T sont donc stables par S . Soit E_λ un de ses sous-espaces propres, supposé de dimension d . On considère les induits sur ce sous-espace de T et S , notés T_F et S_F . Alors T_F est une homothétie, et $S_F^2 = \lambda I_d$. Mais S_F reste symétrique définie positive, elle se diagonalise donc en BON. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de diagonalisation, les vecteurs propres sont les μ_i . On a nécessairement du coup $S_F^2(e_i) = \lambda e_i = \mu_i^2$, autrement dit comme les μ_i sont strictements positifs, on n'a pas le choix, on est obligé de choisir $\mu_i = \sqrt{\lambda}$. Ainsi, S est entièrement déterminé sur tous les sous-espaces propres de T diagonalisable donc est entièrement déterminé sur $\mathbb{R}^n$ tout entier. $\square$

On a donc du coup démontré la partie injectivité dans le théorème. En effet, du coup S est unique et O l'est aussi puisqu'il ne peut valoir que MS^{-1} . La partie surjectivité est facile. On pose S la racine carré de $M^t M = {}^t M.M$ et $O = MS^{-1}$. On sait par ce qui précède que S est définie positive. Il reste à se demander si O est une isométrie. Mais ${}^t OO = S^{-1t} M M S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$.

Du coup, montrons le résultat pour $M_n(\mathbb{R})$. On veut donc montrer que pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a existence de O orthogonale et de S symétrique telle que $M^t O = S$, ie $M = SO$. Raisonnons par densité. On a existence d'une suite de matrices M_n inversibles telles que $M_n \rightarrow M$. Ecrivons la décomposition polaire de $M_n = S_n O_n$. On a donc $M_n S_n^{-1} = O_n$ qui est une suite d'un compact. Il existe donc une sous-suite convergente indéxée par $\varphi(n)$, telle que $O_{\varphi(n)} \rightarrow O$. A partir de là, comme $S_{\varphi(n)} = M_{\varphi(n)}^t O_{\varphi(n)}$, on a que $S_{\varphi(n)} \rightarrow M^t O = S$. De plus, le cône des matrices symétriques définies positives ayant pour fermeture dans $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives (pour le fait que la matrice reste symétrique c'est évident car on a l'égalité $(x, S_n(y)) = (S_n(x), y)$ ce qui par continuité du produit scalaire donne à la limite $(x, S(y)) = (S(x), y)$, le côté positif étant donné par le fait que pour tout x on a $(S_n(x), x) \geq 0$ ce qui encore par continuité donne à la limite $(Sx, x) \geq 0$), on a encore S symétrique positive. Donc $M^t O = S$, ie $M = SO$ avec S symétrique positive et le tour est joué. $\square$

References

[1]