

Developpements asymptotiques de séries.

Pierre Lissy

June 13, 2010

On va faire un raisonnement valable que l'intégrale soit finie ou infinie. On pose $v_n := \int_{n-1}^n g(t)dt$. On considère ensuite les fonctions constantes par morceaux suivantes. Montrer que s_n (resp r_n) est équivalent à $\frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_a^n g(t)dt$ (resp $\frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_n^\infty g(t)dt$) revient à démontrer que $\int_{n-1}^n g(t)dt$ est équivalent à $\frac{1-e^{-\mu}}{\mu} g(n)$, par sommation des relations de comparaisons sur les séries. g étant supposée strictement positive, on peut l'écrire sous la forme $e^{-\mu t} h(t)$ avec h strictement positive. De plus, l'hypothèse nous dit que $g'/g \equiv \mu$, mais $g'(x) = e^{\mu t} h'(x) + \mu g(x)$, donc $g'(x)/g(x) = h'(x)/h(x) + \mu \equiv \mu$. Ceci équivaut à $h'(x)/h(x) + \mu - \mu = o(1)$. Du coup si l'on s'intéresse à $\int_{n-1}^n g(t)dt = \int_{n-1}^n e^{\mu t} h(t)dt = (1-e^{-\mu})/\mu h(n) + \int_{n-1}^n e^{\mu t} (h(t) - h(n))dt$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un N tel que $|h'(x)/h(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \geq N$. Mais alors si $n-1 \geq N$ et si $n-1 < x < n$ on a $|\log(h(x)/h(n))| = |\log(h(n)) - \log(h(x))| = |\int_x^n \log(h(t))' dt| = |\int_x^n h'(t)/h(t) dt| \leq \int_x^n |h'(t)/h(t)| dt \leq (n-x)\varepsilon \leq \varepsilon$, et donc en passant à l'exponentielle, on a que $e^{-\varepsilon} \leq h(x)/h(n) \leq e^\varepsilon$, et donc $(e^{-\varepsilon} - 1)h(n) \leq h(x) - h(n) \leq e^{\varepsilon-1}h(n)$. Mais on remarque que comme $\varepsilon > 0$, on a $0 > e^{-\varepsilon} - 1 \geq 1 - e^\varepsilon$, et donc que $(1 - e^\varepsilon)h(n) \leq h(x) - h(n) \leq e^{\varepsilon-1}h(n)$, ce qui se réécrit encore $|h(x) - h(n)| \leq (e^\varepsilon - 1)h(n)$. On injecte ceci dans l'expression ci-dessus et on obtient, si $\mu > 0$, que $|\int_{n-1}^n g(t)dt - (1 - e^{-\mu})/\mu h(n)| \leq \int_{n-1}^n e^{\mu t} |h(t) - h(n)| dt \leq e^{\mu n} (e^\varepsilon - 1)h(n) \leq g(n) e^{\varepsilon-1}$, et si $\mu < 0$ que $|\int_{n-1}^n g(t)dt - (1 - e^{-\mu})/\mu h(n)| \leq e^{\mu(n-1)} (e^\varepsilon - 1)h(n) \leq e^\mu g(n) e^{\varepsilon-1}$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien le résultat voulu, à savoir $\int_{n-1}^n g(t)dt - (1 - e^{-\mu})/\mu h(n) = o(h(n))$. Enfin, on remarque que ce que l'on vient de faire garde aussi un sens si l'on suppose que $h'(x)/h(x) = o(1)$: il suffit juste dans ce cas de remplacer le facteur $\mu/(e^\mu - 1)$ par 1 et on a exactement les mêmes calculs.

Montrons en quoi on peut se servir de tout ceci dans l'étude de la série harmonique, de somme partielle notée S_n . On a $g(x) = 1/x$. $g'(x)/g(x) = -x/x^2 = o(1)$. Donc on a que $S_n \equiv \int_1^n t/t = \log(n)$. On veut maintenant poursuivre le développement. On s'intéresse donc à la série $\sum (1/n + \log(n) - \log(n+1))$. mais on remarque que $\log(1 + 1/n) = 1/n - 1/2n^2 + o(1/n^2)$ et donc que $1/n + \log(n) - \log(n+1)$ est équivalent à $-1/2n^2$. On a donc que la série converge et si r_n est le reste on a par sommation que $r_n \equiv \sum_n \infty - 1/2n^2$. Posons $g(x) = 1/x^2$. De même que tout à l'heure $g'(x)/g(x) = 0(1)$ donc on a que $r_n \equiv -1/2 \int_n^\infty 1/x^2 = -1/2n$, autrement dit $\sum_n 1/k + \log(k+1) - \log(k) = -1/2n + o(1/n)$. En posant $\gamma := \sum_1^\infty 1/k + \log(k) - \log(k+1)$, on obtient $\gamma - \sum_1^n (1/k + \log(k) - \log(k+1)) = -1/2n + o(1/n)$, ie $\sum_1^n 1/k = \log(n) + \gamma + 1/2n + o(1/n)$. On pourrait poursuivre le raisonnement aussi loin que l'on veut.