

Pierre Lissy

April 6, 2010

Lemme 1. *On considère la rotation élémentaire d'angle $2\pi/n$ et la symétrie par rapport. Alors le groupe engendré par r et s vaut D_n tout entier. Plus précisément, par la relation $(r^k s)^2 = Id$ qui implique $rs = sr^{-k}$, tout élément s'écrit sous la forme $r^k s$ ou r^k .*

Proof. C'est évident car le groupe engendré par r et s est un groupe de cardinal strictement plus grand que n . L'écriture donnée est aussi évidente puisque un élément du groupe engendré s'écrit sous la forme d'un produit de la forme $r^{k_1} s \dots r^{k_n}$ ou $r^{k_1} s \dots r^{k_n} s$ et que la relation permet de commuter les termes. $\square$

On devrait pouvoir motnrrer tout ce qu'on veut maintenant. Ordre des éléments: connus, rotation r^k d'ordre $n/\text{pgcd}(n, k)$, symétrie d'ordre 2, on le redémontre trivialement car $r^{ks} = 1 \Leftrightarrow n|ks \Leftrightarrow n/(\text{pgcd}(n, k))|k/\text{pgcd}(n, k)s \Leftrightarrow n/(\text{pgcd}(n, k))|s$ par le théorème de Gauss.

Classes de conjugaison des éléments. On remarque qu'une classe de conjugaison est pour une question de déterminant forcément inclus dans les rotations. De même classe de symétries inclus dans les symétries. Considérons une rotation ρ et une symétrie f . Alors $f\rho f^{-1} = \rho^{-1}$. De plus, comme le groupe des rotations est abélien, si on conjugue une rotation par une autre rotation on obtient la rotation. Ainsi, la classe de conjugaison de ρ est réduite à deux éléments, elle-même et son inverse. Pour les symétries, on remarque que si f est un élément du groupe diédral il s'écrit $r^k s$ ou r^k d'après ce qui précède. Dans les deux cas, le calcul de $f s f^{-1}$ donne $r^{2k} s$.

1. D'abord si n est impair, alors $r^{2k}, k \in Z = U_n$ car l'ordre de r^2 est l'ordre de r sur $\text{pgcd}(2, n)$ qui vaut un, et donc la classe de conjugaison de g est l'ensemble des symétries tout entier (vu qu'il le contient et est inclus symétries)
2. Si n pair, on remarque que la classe de s est de cardinal $n/2$, et que si l'on considère la classe de rs , c'est $r^{2k+1}s, k \in Z$. Elle est distincte de la première car $r^{2k}s = r^{2l+1}s$ implique que n divise $(2k - 2l - 1)$, ce qui est guère possible vu que n est pair et que le membre de droite est impair. On obtient donc deux classes de conjugaison

Centralisateurs: on utilise la formule des classes. Le centralisateur d'une rotation est de cardinal $2n/2 = n$ et il contient toutes les rotations vu que les rotations sont un sous-groupe commutatif. Le centralisateur des symétries est dans le cas où n est impair de cardinal $2n/n = 2$, or on connaît déjà deux éléments qui centralisent $f : f \text{ et } Id$. Donc le centralisateur d'une symétrie f est réduit à f et Id . Dans le cas pair, le centralisateur est de cardinal 4. Mais on sait que dans le cas pair, la symétrie centrale, ie $-Id$, existe (rotation d'angle $r^{n/2}$, et $-Id$ évidemment commute avec tout. Or on connaît déjà au moins 4 éléments du coup qui commute avec s : $Id, Id, s, -s$ et ses 4 éléments sont distincts. D'où le centralisateur.