

Réduction de Dunford réelle et complexe

Pierre Lissy

May 5, 2010

Commençons par le cas complexe. On considère le polynôme caractéristique que l'on scinde sur $\mathbb{C}$. On a $\chi_f = \prod (X - \lambda_i)^{a_i}$. Notons N_i mes sous-espace caractéristiques. On rappelle qu'ils sont de dimension exactement a_i (en effet on a que $\dim(N_i) \leq a_i$ puisque l'endomorphisme induit $f_i - \lambda_i Id_i$ est nilpotent sur N_i donc son polynôme caractéristique sur l'induit est $X^{\dim(N_i)}$ et celui de f_i est trivialement $(X - \lambda_i)^{\dim(N_i)}$, mais il divise χ_f donc nécessairement $\dim(N_i) \leq a_i$ et on conclut puisque $\sum a_i = \sum \dim(N_i) = n$). Il suffit de déterminer d et n sur les espaces N_i . C'est pas très compliqué. On pose $d_i = \lambda_i Id$ et $n_i = f_i - d_i$. On a bien que d est diagonalisable, que n est nilpotent par la remarque ci-dessous faite entre parenthèses (quand on concatène des petits nilpotentes on obtient un nilpotent), de plus d_i étant scalaire sur N_i on a trivialement que d_i et n_i commutent donc d et n aussi (il suffit encore une fois de décomposer sur une base adaptée).

Montrons maintenant l'unicité. On garde notre première décomposition $f = d + n$ obtenue ci-dessus. Si $f = d' + n'$, avec $d'n' = n'd'$. Montrons d'abord que d et d' commutent. C'est une évidence car d et d' commutent trivialement avec f donc les sous-espaces caractéristiques de f , notés N_i , sont stables par d' mais comme d_i est scalaire sur N_i on a bien $d_i = d'_i$ sur N_i et donc toujours par un argument analogue on a $dd' = d'd$ sur la somme directe des N_i donc sur E . Du coup, par un argument assez connu, leur différence $d - d'$ reste diagonalisable (les sous-espaces propres de d sont stables par d' donc on voit tout de suite que d et d' sont diagonalisables dans la même base et on en déduit facilement le résultat). En outre, $nn' = n'n$ du coup puisque $nn' = (f - d)(f - d') = f^2 - df - fd' + dd' = f^2 - fd - d'f + d'd = (f - d')(f - d) = n'n$. Ceci implique par un calcul facile utilisant la formule du binôme de Newton que $n - n'$ reste nilpotent. Mais $n - n' = d' - d$, on a donc un endomorphisme diagonalisable nilpotent, ce ne peut être que l'endomorphisme nul et $n = n', d = d'$.

Voici comment passer au cas réel. L'unicité est immédiate car en regardant u comme un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -ev, alors s est semisimple donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et n est nilpotent donc on n'a pas le choix c'est forcément ceux du théorème précédent; Inversement si on écrit que la matrice de u s'écrit $U = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotent, alors il est remarquable qu'en passant à la conjugaison, on a $\bar{U} = \bar{D} + \bar{N}$. Mais U étant à coefficients réels on a $U = \bar{U}$. Or $\bar{D}$ reste diagonalisable et $\bar{N}$ reste nilpotent, du coup par unicité dans Dunford complexe on a $\bar{D} = D$ et $\bar{N} = N$. Donc D et N représentent bien des endomorphismes sur notre $\mathbb{R}$ -ev E , avec D diagonalisable dans $\mathbb{C}$ qui est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$ donc semi-simple, et N nilpotent. Enfin, d (et par conséquent $n = f - d$ est un polynôme en f . En effet, $d = \sum \lambda_i p_i$ où p_i est le projecteur sur N_i parallèlement aux autres N_i et le lemme des noyaux nous assure qu'un tel projecteur est un polynôme en f donc c'est aussi le cas pour d .