

Etude d'un système dynamique (page 88 du fgn analyse 1)

Pierre Lissy

April 6, 2010

On considère la fonction $f(x) = 1 - \lambda x^2$. L'intervalle $]0, 1[$ est stable par f . De plus la fonction est décroissante sur $]0, 1[$. Donc le processus $x_{n+1} = f(x_n)$ est tel que les deux suites x_{2n} et x_{2n+1} sont monotoniques de monotonie opposée bornée, elles sont donc convergentes. Reste à voir dans quel cas la limite est la même et ce qu'il se passe sinon; (la suite a deux valeurs d'adhérence). Calculons $f(f(x)) - x$. Il vaut $-\lambda^3 x^4 + 2\lambda^2 x^2 - x + 1 - \lambda = (-\lambda x^2 - x + 1)(\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda) = (f(x) - x)(\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda)$. L'équation $-\lambda x^2 - x + 1 = 0$ a une solution dans $[0, 1]$, notée $l = \frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2\lambda}$. On considère aussi l'autre solution $l' = l = \frac{\sqrt{1-4\lambda}-1}{2\lambda}$ si elle existe. Quant à l'autre morceau, son discriminant n'est pas toujours positif. Il vaut $\Delta = \lambda^2 + 4(1-\lambda)\lambda^2 = \lambda^2(-3+4\lambda)$. On disjoncte trois cas.

1. $\lambda < 3/4$: pas de solution dans $[0, 1]$. Le seul point fixe de $f(f)$ est l . Donc les suites convergent toutes les deux vers l et la suite converge vers l .

2. $\lambda = 3/4$: la solution unique de l'équation est $1/2\lambda = 2/3$, mais on remarque alors que $l = 2/3$ aussi. Même conclusion qu'auparavant.

Dans ces deux cas, remarquons qu'en plus la vitesse de convergence est géométrique d'ordre λ : $(x_{n+1} - l)/(x_n - l) = (1 - \lambda x_n^2 - l)/(x_n - l) = -\lambda^2(x_n - l') \rightarrow \lambda^2/\lambda = \lambda$. C'est donc une convergence tout de même relativement rapide.

3. $\lambda > 3/4$: C'est plus compliqué. Notons l_1 et l_2 les deux racines réelles ordonnées. D'abord, on remarque que $f'(l) = -2l\lambda$ donc $|f'(l)| = \sqrt{1+4\lambda} - 1 > 1$, on a un point fixe répulsif et on a donc jamais convergence de la suite, sauf si on stationne en l . Mais si il existe n tel que $x_n = l$, alors $x_n = 1 - \lambda x_{n-1}^2 = l$, donc $x_{n-1} = l$ aussi et donc $x_0 = l$ et la suite est constante égale à l .

Si x_0 n'est pas égal à l alors la suite ne converge pas. Regardons tout de même de quelle manière elle se comporte. D'abord, on remarque que x_{2n} ne peut converger vers l , sinon comme $x_{2n+1} = f(x_{2n})$, la suite x_{2n+1} convergerait vers $f(l) = l$ et la suite serait convergente à l . Ainsi, l'une converge vers l_1 et l'autre vers l_2 , puisque l_1 et l_2 sont des points fixes de $f(f)$ sans être des points fixes de f . Ceci montrer que $f(l_2) = l_1$ et $f(l_1) = l_2$. On remarque que $l_1 < l < l_2$. (car $\lambda > 3/4$).

Supposons $x_0 < l$. Alors pour tout n , on a $x_{2n} < l$ et $x_{2n+1} > l$ car $f(f)$ stabilise $[0, l]$ et $[l, 1]$. Donc dans ce cas, c'est nécessairement que la première suite extraire converge vers l_1 et la deuxième vers l_2 . Et l'inverse si $x_0 > l$.

References

[1]