

DSE, série formelle, équa diff... Lelong-Ferrand Arnaudières

page 611

Pierre Lissy

May 3, 2010

On s'intéresse à l'équation $(1+x^2)y'' + xy - 1/4y = 0$. On va commencer par chercher les séries formelles qui vérifient cette équation, puis nous verrons si elles correspondent en effet à des fonctions connues, ce qui permettra de trouver les solutions globales.

Considérons donc une série formelle $\sum a_n X^n$. Sa dérivée formelle est $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}X^n$, la dérivée seconde est $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}X^n$. On injecte dans l'équation.

$$(1+X^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}X^n + X \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}X^n - 1/4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = 0$$

, ie en developpant,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}X^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}X^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}X^{n+1} - 1/4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = 0$$

, d'où en réindexant,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 1/4a_n]X^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n X^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n X^n = 0$$

On voit donc ici quelques points intéressants. D'abord la suite est entièrement déterminée par la donnée de a_0 et a_1 . De plus, il paraît intéressant de voir d'abord $a_0 = 1, a_1 = 0$ puis $a_0 = 0, a_1 = 1$ (ce qui donne naissance à deux séries formelles $\varphi_1(X)$ et $\varphi_2(X)$). En effet, la relation de récurrence ci-dessus nous assure alors que dans le premier cas les termes impairs sont nuls, et dans le deuxième cas c'est les termes pairs. Ainsi, on a en utilisant les relations précédentes soit on a $a_0 = 1, a_2 = 1/8$ puis $(n+2)(n+1)a_{n+2} - 1/4a_n + na_n + n(n-1)a_n = 0$, donc $a_{n+2} = (n^2 - 1/4)/(n+2)(n+1)a_n$ pour n pair, et la même chose dans le cas impair: $a_1 = 1$ implique $a_3 = -1/8$ et les mêmes relations. De plus le rayon de convergence est au moins égal à 1 comme on le voit assez facilement. On a donc au moins localement une base de solution, l'une étant pair, l'autre impair. De plus il n'est pas difficile de voir que les deux solutions diffèrent peu au sens que $\varphi_2(x) - x = -x\varphi_1(x)$, ie $\varphi_2(x) = x(1 - \varphi_1(x))$. Une fois que l'on connaîtra donc par exemple la solution paire φ_1 , on aura la partie impaire. De plus, on remarque que φ_1 est l'unique solution paire vérifiant $\varphi_2(0) = 1$ (car une telle solution paire vérifie automatiquement que sa dérivée en 0 s'annule). Or on remarque que le changement de variable suivant: $x = sh(t)$ permet de calculer facilement les solutions explicites de cette équation différentielle: on pose $z(t) = y(sh(t))$ et on voit qu'elle vérifie $z''(t) = 1/4z(t)$. Donc z s'écrit sous la forme $Ach(t/2) + Bsh(t/2)$, ie $y(x) = A.ch(argsh(x)/2) + B.sh(argsh(x)/2)$. Du coup en utilisant le fait que $ch(argsh(x)/2)$ est paire et vaut 1 en 0, on a immédiatement $\varphi_2(x) = ch(argsh(x)/2)$, puis $\varphi_1(x) = (1-x)ch(argsh(x)/2)$.

Conclusion? on connaîtra un DSE autour de 0 de $ch(argsh(x)/2)$ si on arrive à résoudre la relation de récurrence. Or $a_{n+2} = (4n^2 - 1)/(4(n+2)(n+1))a_n = (4n^2 - 1)(4(n-2)^2 - 1)/4^2(n+2)(n+1)n(n-1)a_{n-2} = \dots = \prod (4(n-i)^2 - 1)/(4^{n/2}(n+2))!$. Ainsi, on a un DSE de $ch(argsh(x)/2)$. Mais on peut exprimer très facilement cette fonction. Expliquons rapidement comment. On utilise $x = sh(argsh(x)) = 2ch(argsh(x)/2)sh(argsh(x)/2)$, puis $ch(argsh(x)) = ch^2(argsh(x)/2) + sh^2(argsh(x)/2)$, ie $\sqrt{1+x^2} = ch^2(argsh(x)/2) + sh^2(argsh(x)/2)$. On en déduit que φ_2^2 vérifie l'équation polynomiale du second ordre $X^2 - \sqrt{1+x^2}X - x^2/4 = 0$, de

discriminant 1 est dont la seule solution positive est $(1 + \sqrt{1 + x^2})/2$. Ainsi par positivité de φ_2 , on a $\varphi_2(x) = \sqrt{(1 + \sqrt{1 + x^2})/2}$. Ainsi, on en a déduit un DSE de $\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$ sur $[-1, 1]$!