

Ellipsoïde de John (FGN algèbre page 229)

Pierre Lissy

March 26, 2010

Intéressant de voir l'application du FGN qu suit: sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$. Par définition, un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points vérifiant une équation du type $q(x) \leq 1$ avec q une forme quadratique définie positive. Soit E_q l'ellipsoïde associé à la forme q . Commençons par calculer l'aire de cet ellipsoïde, notée V_q . Il existe une base orthonormale telle que $q(x) = \sum a_i x_i^2$. Alors $V_q = \int_{\sum a_i x_i^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_n$. Effectuons le changement de variable $x_i = t_i / \sqrt{a_i}$, de jacobien $1/\sqrt{a_1 \dots a_n}$. Notons $\text{Det}(q)$ le discriminant de la forme quadratique (déterminant dans n'importe quelle BON), $\det(q) = a_1 \dots a_n$. Le changement de variable donne donc $V_q = 1/\sqrt{\det(q)} V_0$, où V_0 est la boule centrée unité. Minimiser V_q revient donc à maximiser $\det(q)$. On cherche donc à montrer que pour tout compact, il existe une unique forme quadratique q de déterminant maximum telle que l'ellipsoïde qu'elle définit contient K . On munit l'espace quadratique de la norme N définie par $N(q) = \sup(|q(x)|, \|x\| \leq 1)$. Considérons l'ensemble $A = \{q \in Q^+ | \forall x \in K, q(x) \leq 1\}$. On cherche à maximiser le discriminant D sur cet ensemble. Montrons que c'est un compact convexe non vide.

1. La convexité est évidente: si $q \in A$ et $q' \in A$, alors $\lambda q(x) + (1 - \lambda)q'(x)$ reste positive, de plus $\lambda q(x) + (1 - \lambda)q'(x) \leq \lambda + (1 - \lambda) \leq 1$.
2. A est fermé: c'est une intersection de fermés (les $q(x)$)
3. A est borné: K étant d'intérieur non vide, on a existence d'un $r > 0$ et d'un a tel que $B(a, r) \subset K$. Soit $q \in A$. Si $\|x\| \leq r$, alors $a + x \in A$ donc $q(a + x) \leq 1$. De plus, $q(a) = q(-a) \leq 1$. L'inégalité de Minkovski donne donc que $\sqrt{q(x)} \leq \sqrt{q(a+x)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2$. Donc $q(x) \leq 4$. Si $\|x\| \leq 1$, on a donc $q(x) \leq 4/r^2$.
4. A est non vide. En effet, K est bornée par M . On considère la forme quadratique suivante: $q(x) = \|x\|^2/M$, elle est positive et l'ensemble des x tels que $q(x) \leq 1$ contient K .

Donc A est un convexe compact non vide. l'application D étant continue, elle est bornée sur A et atteint ses bornes donc atteint son sup en un certain q_0 . Or on a montré que A contenait une forme définie positive, on a donc q_0 est définie positive. Il existe donc un ellipsoïde de volume maximal. Reste à voir si il est unique, donc que q_0 est unique. Considérons un autre q_1 tel que $D(q_0) = D(q_1)$. On considère leurs matrices dans la base canonique S_0 et S_1 . Par convexité de A , on a aussi $1/2(q_0 + q_1)$ dans A . Par le lemme suivant, $\det(1/2(S_0 + S_1)) > \det(S)^{1/2} \det(S_0)^{1/2} = \det(q_0)$, contredit la maximalité.

Lemme 1. On considère A et B sont deux matrices définies positives distinctes, alors Si $\alpha + \beta = 1$, alors $\det(\alpha A + \beta B) > (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.

Proof. Par diagonalisation simultanée, on a $A = {}^t P P$ et $B = {}^t P D P$ avec D diagonale, de coefficient d_i strictement positifs. $\det(A)^\alpha \det(B)^\beta = \det(P^2) \det(D)^\beta$, et $\det(\alpha A + \beta B) = \det(P^2) \det(\alpha I_n + \beta D)$. On est ramené à montrer $\prod d_i > \prod (\alpha + \beta d_i)$. La stricte concavité du log permet de conclure : $\ln(\alpha + \beta d_i) > \alpha \ln(1) + \beta \ln(d_i)$, on somme sur i , on passe à l'exponentielle et c'est fini. $\square$