

Estimations à posteriori dans l'erreur d'Euler explicite (Sibony V 21)

Pierre Lissy

June 12, 2010

y étant de classe C^3 (vu que f est de classe C^2 , on écrit Taylor-Lagrange à l'ordre 2: il existe un $x_n \leq \xi_n \leq x_{n+1}$ tel que $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + h^2/2y''(x_n) + h^3/6y'''(\xi_n) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + h^2/2y''(x_n) + h^3/6y'''(\xi_n)$. Mais par définition $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hf(x_n, y(x_n) + e_n)$. Donc on peut maintenant utiliser Taylor à l'ordre un pour f : il existe un $y_n \leq \eta_n \leq y_{n+1}$ tel que $f(x_n, y(x_n) + e_n) = f(x_n, y(x_n)) + e_nf_y(x_n, y(x_n)) + e_n^2/2f_{yy}(x_n, \eta_n)$. D'où $e_{n+1} = y_{n+1} - y(x_{n+1}) = e_n + h(f(x_n, y(x_n) + e_n) - f(x_n, y(x_n))) - h^2/2y''(x_n) - h^3/6y'''(\xi_n)$ et vaut donc $e_{n+1} = e_n + h(e_nf_y(x_n, y(x_n)) + e_n^2/2f_{yy}(x_n, \eta_n)) - h^2/2y''(x_n) - h^3/6y'''(\xi_n)$. En posant $\bar{e}_n = e_n/h$, on obtient $e_{n+1} = \bar{e}_n + h(e_nf_y(x_n, y(x_n)) - y''(x_n)/2) + h^2R_n$ avec $R_n := y'''(x_n)/6 + e_n^{-1}f_{yy}(x_n, \eta_n)$. On sait d'après les estimations à priori de l'erreur que $|e_n| \leq hN(x_n)(e^{K(x_n-a)} - 1)/K$ avec $N(x) = \sup_{[a,x]} |y''(t)|$. N étant bornée et x_n aussi on a que e_n est bornée et donc le reste R_n est lui aussi car y''' est continue sur un compact donc bornée, de même pour f_{yy} . Ainsi, $R_n = \theta_n * C$ avec $|\theta_n| \leq 1$ et on obtient que

$$e_{n+1} = \bar{e}_n + h(e_nf_y(x_n, y(x_n)) - y''(x_n)/2) + h^2\theta_n C.$$

Mais on voit qu'on obtient ici un "schéma d'Euler corrigé" pour l'équation différentielle $e'(x) = f_y(x, y(x))e(x) - 1/2y''(x) = g(x, e)$ avec condition initiale $e(a) = 0$. Il faut montrer que les conditions du théorème sont réalisées, autrement dit que g est de classe C^1 sur $[a, b] \times \mathbb{R}$, mais c'est une évidence, et que g est lipschitzienne en la deuxième variable: $|g(x, e_1) - g(x, e_2)| \leq L|e_1 - e_2|$ avec $L = \sup |f_y(x, y(x))| < \infty$ car la fonction y est continue donc la fonction considérée est continue sur un compact donc bornée et atteint ses bornes.

On a donc par théorème que $|\bar{e}_n - e(x_n)| \leq 1/2(\|e''\|_\infty + C)h(e^{K(x_n-a)} - 1)/K \leq D.h$ car on peut majorer le terme par une constante (les fonctions sont continues sur des compacts et donc les termes dépendant éventuellement de n sont bornés!). On a donc bien $\bar{e}_n = e(x_n) + O(h)$, ce qui est ce qu'on veut.

Application: accélération de convergence.