

Théorème des extremas liés et application (Beck page 35, ciarlet page 149)

Pierre Lissy

May 1, 2010

Lemme 1. Soit Ω un ouvert d'un evn produit de dim finie $V_1 \times V_2$, soit g une application de classe C^1 sur Ω à valeurs dans V_2 et u un point de l'espace contraint $g = 0$, en lequel $\partial_2 g$ est une application linéaire inversible. Soit maintenant f une fonction définie sur Ω à valeurs réelles qui soit différentiable. Si J admet en un extremum sous la contrainte C , alors il existe un élément $\Gamma(u) \in V_2'$ tel que $Df(u) + \Gamma(u)dg(u) = 0$.

Proof. On a les hypothèses pour appliquer le théorème des fonctions implicites dans un voisinage de u : il existe deux voisinages O_1 et O_2 et une application h de classe C^1 telle que tels que $v = (v_1, v_2) \in O_1 \times O_2, g(v) = 0 \Leftrightarrow v_2 = h(v_1)$. De plus, on connaît explicitement la différentielle de h , c'est $dh(u_1) = -(\partial_2 g(u))^{-1} \partial_1 g(u)$.

Considérons $v_1 \in O_1 \mapsto f(v_1, h(v_1))$. u_1 est du coup dans ce voisinage un extremum de cette fonction donc on lui applique la condition nécessaire sur les extremums libres: $d(f(u_1, h(u_1))) = 0$, ie $\partial_1 f(u_1, h(u_1)) + \partial_2 f(u_1, h(u_1))dh(u_1) = 0$, ie $\partial_1 f(u) + \partial_2 f(u)dh(u_1) = 0$, ie $\partial_1 f(u) - \partial_2 f(u)(\partial_2 g(u))^{-1} \partial_1 g(u) = 0$, ie $dg(u) \partial_2 f(u) (\partial_2 g(u))^{-1} - 1 dg(u) = 0$. On a donc le résultat voulu avec $\Gamma(u) = -\partial_2 f(u) (\partial_2 g(u))^{-1}$ □

Démontrons le théorème des extremas liés. Les dg_i sont supposées linéairement indépendantes. Cela signifie que la matrice $\partial_j g_i(a)$ est de rang $m \leq n$. On peut donc en extraire une sous-matrice inversible de taille m , supposée pour fixer les idées être égale aux m premiers indices. Du coup, le théorème précédent s'applique avec $V_1 = R^{n-m}$ et $V_2 = R^m$, et $g(v) = \sum_{i=1}^m g_i(v) e_i$. où e_i est la base canonique de R^n . On exhibe un élément du dual de R^m tel que $df(u) + \Gamma(u)dg(u) = 0$, ce que l'on peut évidemment réécrire sous la forme voulue en décomposant Γ_u sur la base duale e_i^* .

Application 1. SO est l'ensemble des éléments de SL qui minimise la norme euclidienne canonique.

Proof. C'est un problème de minimisation sous contrainte. On veut minimiser la norme 2 au carré sous la contrainte $g(M) = 0$ avec $g(M) = \det(M) - 1$. L'espace contraint C est bien SL_n .

Supposons que M est un point pour lequel un extremum est atteint. D'après le théorème des extremas liés, on a donc en posant f l'application norme l'existence d'un λ non nul tel que $df(M) = \lambda dg(M)$. Mais on rappelle que $df(M)(H) = 2(M, H)$ et que $dg(M)(H) = \text{Tr}({}^t \text{Com}(M)H) = (\text{Com}(M), H)$. ceci entraîne l'égalité $2M = \lambda \text{com}(M)$. Mais on sait en outre qu'on a la relation ${}^t \text{com}(M).M = \det(M)Id = Id$, donc notamment en multipliant par 2 et en injectant la relation au-dessus, on obtient ${}^t M.M = 2/\lambda Id$. Prenons la trace dans les deux membres. La matrice de droite étant définie positive sa trace est strictement positive, donc $\lambda > 0$. Puis en prenant le déterminant on a $1 = (2\lambda)^n$ d'où $\lambda = 2$ et ${}^t M.M = Id$, ie M est bien orthogonale et de déterminant égal à 1 donc $M \in SO_n(\mathbb{R})$.

Inversément, l'application norme étant constante sur les matrices de $SO_n(\mathbb{R})$ égale à n (si $O \in SO_n(\mathbb{R})$ alors $\|O\|_2 = \text{Tr}({}^t O.O) = \text{Tr}(Id) = n$), pour montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ minimise effectivement cette norme il suffit de montrer que toute matrice de $SL_n(\mathbb{R})$ est telle que $\text{Tr}({}^t AA) \geq n$. Mais ${}^t AA$ est symétrique définie positive elle vérifie donc que sa trace est la somme de ses valeurs propres, et que son déterminant, qui vaut 1, est le produit de ses valeurs propres. Si $x_1, \dots, x_n > 0$ et si $x_1 \dots x_n = 1$, a-t-on nécessairement $\sum x_i \geq n$? Oui par l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique. Doù le résultat. □