

Théorème de Fejer

Pierre Lissy

June 10, 2010

On commence donc par remarquer que dans le cas $\|\sigma_N(f)\|_\infty = \|f * K_N\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|K_N\|_1$. Mais $K_N = \sum (1 - |n|/N) e_n$, et K_N est positif, donc on a que $\|K_N\|_1 = c_0(K_N) = 1$. D'où l'inégalité $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. De plus, on a que $f(x) - \sigma_N(f, x) = f(x) - 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t) dt = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_N(t) dt$. On se donne maintenant un certain $\delta > 0$ quelconque pour le moment. On a $|f(x) - \sigma_N(f, x)| \leq 1/2\pi \int_{|t| \leq \delta} |f(x) - f(x-t)| K_N(t) dt + 1/2\pi \int_{\delta < |t| < \pi} |f(x) - f(x-t)| K_N(t) dt$. Mais la fonction f étant continue elle est uc; Si l'on se donne $\varepsilon > 0$, il existe un certain $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta$ implique que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Du coup en réinjectant dans l'inégalité précédente on a que $|f(x) - \sigma_N(f, x)| \leq 1/2\pi \int_{|t| \leq \delta} \varepsilon K_N(t) dt + 1/2\pi \int_{\delta < |t| < \pi} |f(x) - f(x-t)| K_N(t) dt \leq \varepsilon + \|f\|_\infty / 2\pi \int_{\delta < |t| < \pi} K_N(t) dt \leq \varepsilon + \|f\|_\infty / \pi \int_{\delta < |t| < \pi} (1/N) \sin(Nx/2) / (\sin(x/2)) dt$. Mais $|\sin(Nx/2)| \leq 1$ et $|\sin(x/2)| \geq |\sin(\delta/2)|$, par croissance du sin sur $[0, \pi/2]$ et $|f(x) - \sigma_N(f, x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty / (N \sin^2(\delta/2))$. Soit donc maintenant que si $N \geq A$ alors $2\|f\|_\infty / (N \sin^2(\delta/2)) \leq \varepsilon$. Du coup, pour tout x , on a pour $N \geq A$ que $|f(x) - \sigma_N(f, x)| \leq 2\varepsilon$ et on a démontré ce qu'on voulait. Si maintenant on a $f \in L^p$. On considère vu que K_N est strictement positif la mesure suivante: $K_N(t) dt / 2\pi$. On applique l'inégalité de *Hlder* pour cette mesure. $|\sigma_N(f)|^p \leq 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_N(t) dt \int_{-\pi}^{\pi} \pi 1^{p'} K_N(t) dt \leq 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_N(t) dt$. Maintenant, on intègre et on utilise le théorème de Fubini-Tonelli: $\|\sigma_N(f)\|_p^p \leq 1/4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) [\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p dx] dt \leq 1/4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) [\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx] dt \leq \|K_N\|_1 \|f\|_p^p \leq \|f\|_p^p$. On a donc bien l'inégalité voulue. Maintenant, on s'intéresse à $f(x) - \sigma_N(f, x) = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)| K_N(t) dt$. Cela conduit à $\|f - \sigma_N(f)\|_p^p \leq 1/4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) [\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|^p dx] dt = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) g(-t) dt = \sigma_N(g, 0)$ avec $g(t) = \|f - \tau_t f\|_p^p$. Mais on sait par la propriété d'équicontinuité en moyenne que g est continue. Démontrons-le rapidement. C'est facile. On approche f à ε près par g continue à support compact. On a alors $\|f - \tau_t f\|_p^p \leq \|(f - g) + \tau_t(f - g)\|_p^p + \|g - \tau_t g\|_p^p \leq \varepsilon$ et maintenant que g est continue elle est uc et donc pour t assez petit on a que $|x - y| \leq T$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ et on a donc pour $t \leq T$ on a $\|f - \tau_t f\|_p^p \leq \varepsilon + \varepsilon$ et c'est gagné.

Par ce qu'on a démontré juste avant, on a $\sigma_N(g, 0) \rightarrow g(0) = 0$ et donc on a bien $\sigma_N(g, 0) \geq \|\sigma_N(f) - f\|_p \rightarrow 0$.