

Pierre Lissy

March 26, 2010

Dans le plan doivent apparaître la définition des pôles et l'action du groupe fini G sur l'ensemble des pôles X . On peut alors expliquer les grandes étapes. D'abord, remarquons que le cardinal de l'ensemble des pôles est plus grand que 2 (on a au moins une rotation autre que Id) et plus petit que $2(n-1)$ (cas le pire où tous les éléments ont des pôles différents). Appliquons la formule de Burnside. Soit k le nombre d'orbites. $k = 1/|G| * \sum_{g \in D_{14}} |fix(g)|$. L'identité fixe tout, les autres rotations fixent juste 2 points. Donc $k = 1/n * (Card(X) + 2(n-1))$. L'encadrement $2 \leq |X| \leq 2(n-1)$ donne immédiatement $2 \leq k \leq 4(1 - 1/n)$, donc $k=2$ ou 3.

1. Si $k = 2$. La formule de Burnside donne immédiatement que $X = 2$. Donc tous les éléments de G privé de l'identité ont les mêmes pôles P et P' qui forment deux orbites ponctuelles, autrement dit tout élément de G fixe P et P' . Donc les éléments de G sont toutes des rotations selon cet axe. Appelons H l'hyperplan orthogonal à cette droite. Alors $g \in G$ différent de Id est entièrement déterminé par sa restriction à l'hyperplan H . Autrement dit, G est isomorphe à un sous-groupe du groupe des isométries directes de l'espace hyperplan H , donc est isomorphe à un Z/nZ .
2. Soit $k = 3$. Alors la formule de Burnside donne que $X = n + 2$. Appelons X_1 , X_2 et X_3 les trois orbites classées par cardinal décroissant. On considère les cardinaux m_1 , m_2 et m_3 des stabilisateurs d'un élément de chaque orbite. On a $m_1 \leq m_2 \leq m_3$. Par la formule des classes, $n + 2 = n/(m_1) + n/(m_2) + n/(m_3) \leq 3n/m_1$. Donc $1 < 3/m_1$, autrement dit $m_1 = 1$ ou 2. Mais on ne peut pas avoir $m_1 = 1$ car il existe toujours au moins deux éléments de G qui stabilisent un pôle P : l'identité et la rotation de laquelle P est issue (ie g tq $P = P_g$ ou P'_g). Donc $m_1 = 2$ et en réutilisant la formule des classes, on a $1/2 + 2/n = 1/(m_2) + 1/(m_3) \leq 2/m_2$. Ainsi, $1/2 < 2/m_2$ ce qui implique que $m_2 = 2$ ou 3.
 - (a) Si $m_2 = 2$. La formule des classes donne que $card(X_3) = n + 2 - n/2 - n/2 = 2$, donc si l'on appelle P et P' les éléments de X_3 , de deux choses l'une. Soit g stabilise P . Dans ce cas g stabilise aussi P' et on est ramené au cas $k = 2$. Autrement dit le stabilisateur G_P de P est isomorphe à $Z/(n/2)Z$. Considérons un g qui n'est pas dans le stabilisateur. Alors il échange les points P et P' . C'est donc nécessairement un demi-tour d'axe perpendiculaire à la droite PP' et donc c'est un élément d'ordre 2. Soit a un générateur de G_P . Si l'on prend un élément quelconque qui ne stabilise pas P , disons b , on a que $\langle a, b \rangle = G$, avec a d'ordre $n/2$, $b^2 = Id$ et $(ab)^2 = Id$ (puisque cet élément ne stabilise pas P), d'après un lemme classique c'est forcément le diédral $D_{n/2}$.
 - (b) Si $m_2 = 3$. On a d'après la formule des classes, $1/6 + 2/n = 1/m_3$ donc $m_3 = 3, 4, 5$.
 - i. Si $m_3 = 3$, la formule de Burnside donne $2/n = 1/6$ donc $n = 12$. De plus, on remarque que $|X_2| = 12/3 = 4$. On considère l'action de G sur cette orbite, et le morphisme $\varphi : G \rightarrow S_4$ associé. Il est nécessairement injectif. En effet, un élément qui stabilise 4 pôles distincts est nécessairement Id. Ainsi, G est un sous-groupe d'ordre 12 de S_4 , c'est nécessairement A_4 .
 - ii. Si $m_3 = 4$, on admet que l'on trouve comme classe d'isomorphie le groupe des isométries positives du cube donc S_4 .
 - iii. Si $m_3 = 5$, on admet que l'on trouve le groupe des isométries de l'icosaèdre, donc A_5 .